

Research Paper



MCMC and Regression Methods in Gravity Wave Analysis



Mehdi Shams*¹, Fahimeh Momeni ²



This paper is an open access and licensed under the CC BY NC license.



DOI: [10.22034/STRAP.2023.15719](https://doi.org/10.22034/STRAP.2023.15719)

Reference to this article: Shams, M., Momeni, F. (2023). MCMC and regression methods in gravity wave analysis. *Scientific Researches in Theoretical and Applied Physics*, 1(1) P5-15.

Keywords

Gravitational waves,
Bayesian model,
astronomy

A B S T R A C T

Bayesian models contain many parameters. In this article, a Bayesian model for studying evolving time-scale relationships in astronomy is investigated. Also, by using the Bayesian framework, finding the best parameter fit under a specific model of astronomical gravitational wave data with Markov chain Monte Carlo algorithm is discussed. In the end, the BCES estimators are introduced, which are used in extragalactic astronomy, and these estimators will be compared with WLS and OLS in a linear model of color versus absolute magnitude.

Received: 2022/07/17

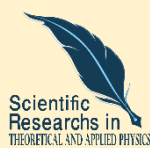
Accepted: 2022/12/21

Available: 2023/06/10

* Corresponding Author: Mehdi Shams
E-Mail : mehdishams@kashanu.ac.ir

1. Assistant Professor, Department of Statistics, University of Kashan, Kashan, Iran.
2. Master Graduate of Statistics, University of Tehran, Tehran, Iran.

مقاله پژوهشی



روش‌های MCMC و رگرسیونی در تحلیل امواج گرانشی

مهدی شمس^{۱*}، فهیمه مومنی^۲

این مقاله به صورت دسترسی باز و با لایسنس CC BY NC کرییتیو کامنز قابل استفاده است.



ارجاع به این مقاله: شمس، مهدی؛ مومنی، فهیمه. (۱۴۰۱). روش‌های MCMC و رگرسیونی در تحلیل امواج گرانشی. پژوهش‌های علمی در فیزیک نظری و کاربردی، ۱(۱)، ۵-۱۵.

DOI: [10.22034/STRAP.2023.15719](https://doi.org/10.22034/STRAP.2023.15719)

چکیده

مدل‌های بیزی شامل پارامترهای زیادی هستند. در این مقاله یک مدل بیزی برای مطالعه روابط مقیاس زمان در حال تحول در نجوم مورد بررسی قرار می‌گیرد. همچنین با استفاده از چارچوب بیزی به یافتن بهترین برازش پارامتر تحت یک مدل خاص از داده‌های امواج گرانشی نجوم با الگوریتم زنجیرهای مارکوف مونت کارلویی پرداخته می‌شود. در پایان برآوردهای BCES معرفی می‌شوند که در نجوم فراکشانی کاربرد دارند و این برآوردها با WLS و OLS در یک مدل خطی رنگ در برابر بزرگی مطلق مقایسه خواهند شد.

کلیدواژه‌ها

امواج گرانشی، مدل بیزی، نجوم.

دریافت شده: ۱۴۰۱/۰۴/۲۶

پذیرفته شده: ۱۴۰۱/۰۹/۳۰

منتشر شده: ۱۴۰۲/۰۳/۲۰

* نویسنده مسئول: مهدی شمس

رایانامه: mehdishams@kashanu.ac.ir

۱- استادیار، گروه آمار، دانشگاه کاشان.

۲- فارغ التحصیل کارشناسی ارشد، رشته آمار، دانشگاه تهران.

۱- مقدمه

از آغاز، نجوم و آمار تاریخی در هم آمیخته با یکدیگر داشته‌اند. دانشمندان از ابزار آمار در تحلیل داده‌های ستاره‌شناسی استفاده می‌کردند و این باعث بهبود شناخت بشر و همچنین درک بهتر او از عالم شده است. در این مقاله بیشتر بر کاربردهای تحلیل‌های بیزی^۱ برازش خطی (رگرسیون خطی)^۲ در تحلیل داده‌ها نجوم و اختر فیزیک تمرکز می‌کنیم. همچنین یک روش بیزی جامع برای تحلیل امواج گرانشی^۳ معرفی می‌کنیم. برای مشاهده کاربردهای آمار در اختر فیزیک می‌توان به [۸] مراجعه کرد.

تحلیل برازش خطی کاربرد وسیعی در تحقیقات نجومی امروزه دارد. به عنوان مثال در ستاره‌شناسی فراهکشان، روابط بین دمای اشعه ایکس و سرعت پراکندگی خوشه‌های کهکشانی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است که می‌تواند با تحلیل برازش خطی بررسی شود. بیشتر ویژگی‌های تحلیل‌های داده‌های نجومی پراکنش ذاتی، حول برازش خطی هستند. در این مقاله رابطه وضوح رنگ حوزه کهکشان‌ها و رابطه تولی-فیشر^۴ و آزمون تولمن^۵ معرفی می‌گردند. در [۱۶] به تفصیل روی اثرات پراکندگی‌های ذاتی و خطای اندازه‌گیری در برآورد شیب مطالعاتی انجام شده است. در [۷] به یکی از مشکلات برجسته در برازش خطی یعنی تطبیق خطای اندازه‌گیری ناهم‌وابستگی^۶ و پراکندگی ذاتی اشاره می‌شود. در [۱۰] یک روش بیزی موسوم به MLINMIX بر اساس تابع درست‌نمایی^۷ داده‌ها ارائه شد که [۱۲] این روش را با جایگزین کردن پیشین دریکله به جای استفاده از توزیع‌های آمیخته تعمیم داد. در تحلیل‌های نجومی اغلب به جای متغیرهایی مانند جرم سیاه‌چاله‌ها، جرم خوشه‌های کهکشانی و نرخ ستاره‌های تولید شده کهکشان که قابل دسترس نیستند، به همبستگی بین مقادیر قابل مشاهده علاقه‌مند هستیم. محققان یک مجموعه متنوع از اعتقادات پیشین در مورد علت پدیده‌ها و حجم اطلاعات ناکافی از داده‌های موجود در اختیار دارند و از این رو تحلیل بیز می‌تواند به بسیاری از سوالات منجمان پاسخ دهد. توزیع پیشینی که پارامتر فیزیکی آن یک منبع انتشار نور باشد را تا قبل از انجام آزمایش نمی‌توان شناخت. مشاهدات نجومی می‌توانند به محدوده‌ی مکان رویدادها کمک کند و همچنین این اطلاعات را می‌توان در توزیع پیشین^۸ برای پارامترهای مکان و در جست و جوی امواج گرانشی به کار گرفت.

در بخش ۲ ابتدا تعریفی از امواج گرانشی ارائه می‌دهیم و سپس کاربرد قضیه بیز را در تحلیل انفجار اشعه گاما مطرح می‌کنیم. همچنین در این بخش چگونگی برآورد پارامترها و انتخاب بهترین مدل را بررسی کرده در پایان برای این منظور از الگوریتم‌های زنجیرهای مارکوف مونت کارلویی^۹ (MCMC) استفاده می‌کنیم.

1. Bayesian analysis
2. linear regression
3. gravitational wave
4. Tully-Fisher relation
5. Tolman test
6. inhomogeneity
7. likelihood function
8. prior distribution
9. Markov Chain Monte Carlo

در بخش ۳ مشکلات مهم برازش مدل‌های برازش با داده‌هایی که دارای خطای اندازه‌گیری ناهم‌وابستگی از معلوم بودن انحراف معیار، و مجهول بودن پراکندگی ذاتی هستند را نشان می‌دهیم. در اینجا دو روش برازش برآورد کمترین مربعات معمولی و برآورد کمترین مربعات وزن‌دار را تعریف می‌کنیم که هر دو روش فقط به برازش خطی وابسته هستند. در ادامه برازش نیمساز و برازش متعامد نیز مطرح می‌گردند. در انتها این روش با استفاده از یک مجموعه داده نجومی، از شبیه‌سازی برای محاسبه برآوردگرها استفاده می‌کنیم.

در بخش ۴ پس از معرفی مفاهیمی چون مقیاس‌گذاری خطی، انحراف از خطی بودن، اندازه عدم قطعیت و پراکنش ذاتی، به کمک شبیه‌سازی به بررسی این مفاهیم می‌پردازیم.

۲- کاربرد روش‌های بیزی در امواج گرانشی نجوم

در علم فیزیک، موج گرانشی موجی است که توسط میدان گرانشی تولید می‌شود. وجود این نوع از امواج توسط آلبرت اینشتین^{۱۰} در سال ۱۹۱۶ از طریق نظریه نسبیت عام^{۱۱} و صد سال بعد، در سال ۲۰۱۶ به کمک تأسیسات LIGO (صدخانه امواج گرانشی تداخل سنج لیزری^{۱۲}) به طور تجربی مشاهده گردید [۱]. شکل‌های ۱ و ۲ دو سایت اصلی در ایالت متحده آمریکا که میزبان تداخل سنج LIGO هستند را نشان می‌دهد. موج گرانشی به طور نظری انرژی تابشی گرانشی را منتقل می‌کند. منابع موج‌های گرانشی قابل آشکارسازی^{۱۳}، شامل سیستم‌های ستاره دوتایی^{۱۴} است که یکی از اعضای آن کوتوله سفید^{۱۵}، ستاره نوترونی^{۱۶} یا سیاه‌چاله^{۱۷} باشد. ردیابی امواج گرانشی در فیزیک و کیهان‌شناسی مورد بررسی قرار می‌گیرد. فرضیه نسبیت عام اینشتین حدود ۱۰۰ سال پیش ارائه شد و نظریه دیگری به نام نظریه تورم کیهانی در دهه هشتاد میلادی مطرح شد. امواج گرانشی مثل چین‌های ریزی در تار و پود هستی هستند و انرژی را در کیهان جابه‌جا می‌کنند. این امواج از ۳۸۰ هزار سال پس از مه‌بانگ در پس‌زمینه کیهان در ترنم بوده‌اند، اما در طول این زمان طولانی از پلاسمای بسیار داغ به امواج بسیار سرد تبدیل شده‌اند. موج مشاهده شده توسط تأسیسات LIGO در سال ۲۰۱۶ ناشی از ادغام دو سیاه‌چاله با جرم‌های تقریبی ۳۶ و ۲۹ برابر جرم خورشید و در فاصله ۳/۱ میلیارد سال نوری از زمین بود. این کشف یکی از مهم‌ترین اقدامات در اخترشناسی و فیزیک ارزیابی می‌شود و به دانشمندان امکان می‌دهد که برای نخستین بار پژواک انفجار بزرگ یعنی لحظه‌ای که کیهان از نیستی به هستی آمد را پس از ۱۳.۸۲ میلیارد سال بشنوند. محققان یک مجموعه متنوع از اعتقادات پیشین در مورد علت پدیده‌ها و حجم اطلاعات ناکافی از داده‌های موجود در اختیار دارند. یک کاربرد تحلیل بیز این است که آیا در اصل GRBها (انفجار اشعه گاما^{۱۸}) کهکشانی یا کیهانی بودند. (برای مشاهده

10. Albert Einstein
11. general relativity
12. Laser Interferometer Gravitational-wave Observatory
13. decryption
14. binary stars
15. white dwarf
16. general relativity
17. black holes
18. Gamma Ray Bursts

این اطلاعات را می‌توان در توزیع پیشین برای پارامترهای مکان و در جست و جوی امواج گرانشی به کار گرفت.

جزئیات بیشتر به [۵،۱۱،۱۳] مراجعه نمایید. پیشینی را که پارامتر فیزیکی آن یک منبع انتشار نور باشد، تا قبل از انجام آزمایش نمی‌توان شناخت.

۱-۲ برآورد پارامتر و انتخاب مدل

اگر داده‌ها از نتایج تعدادی فرایند با مدل M باشند که به وسیله بردار مقادیر فیزیکی $\vec{\theta}$ پارامتری شده‌اند، برای برآورد تابع چگالی احتمال از قضیه بیز استفاده می‌کنیم:

$$P(\vec{\theta}|d, M) = \frac{P(d|\vec{\theta}, M)P(\vec{\theta}, M)}{P(d, M)} \quad (۱)$$

که در آن $P(d, M) = \int P(\vec{\theta}, M) P(d|\vec{\theta}, M) d\vec{\theta}$

بیشینه مطلق تابع احتمال، یا نقطه بیشینه پسین^۳ (MAP)، جایی که پارامترهای مدل مقادیر «بهترین برازش» برای فرضیه مورد درخواست هستند، آن مقادیر پارامترها توسط توزیع پیشین وزن دار می‌شوند. روش دیگری ارزیابی معادله (۱) همراه نقاط گسسته توزیع در سراسر فضای پارامتر است. متأسفانه در بسیاری از برنامه‌های کاربردی امواج گرانشی تعداد پارامترهای مورد نیاز برای توصیف سیگنال زیاد هستند و ناحیه معنی‌داری وزن پسین به طور کلی یک میزان ناچیزی از کل حجم پیشین را تصرف می‌کند.

دو مدل رقیب با بعدهای مختلف به داده‌ها برازش می‌دهیم. به طور کلی یک مدل با ابعاد بالا، بهترین برازش را به یک مجموعه داده تولید خواهد کرد. این حقیقت، زمانی که تعدادی مدل مختلف، با پارامترهای گوناگون بر داده‌ها برازش می‌شود، یک محدودیت را ایجاد می‌کند. روند تصمیم‌گیری برای انتخاب مناسب‌ترین مدل فقط به مدلی که بهترین برازش را دارد بستگی ندارد. در زمینه آشکارسازی امواج گرانشی، این قضایای مختلف، می‌توانند پارامترهای فیزیکی اضافی که در منابع مدل استفاده می‌شود، یا مشمول منابع اضافی در داده‌ها است را دربرگیرند.

یکی از مهم‌ترین اشکال در پیش‌بینی‌های قابل اعتماد از امواج گرانشی، نتایج به‌دست آمده از مدار اجرام ستاره‌ای اشیاء متراکم (مانند ستاره‌های کوتوله سفید) درون کهکشان است. مدل‌های اغتشاش بر پایه این حقیقت هستند که شکل موج سیاه‌چاله‌های مارپیچی دوتایی (حلزونی) می‌توانند با یک ترکیب خطی از کوتوله‌های سفید دوتایی نوشته شوند. بنابراین، اگر شکل موج یک سیاه‌چاله مارپیچی از طریق داده‌ها کدگذاری شده باشد، می‌تواند برای یک مجموعه از کوتوله‌های سفید دوتایی، در یک تحلیل انتخاب مدل گمراه‌کننده باشد. قضیه بیز برای مدل M به صورت $P(M|d) = P(d|M)P(M)/P(d)$ خواهد بود. در مسأله انتخاب مدل فرضیات گسسته هستند. داده‌ها از طریق مدل‌های M_i توصیف شده‌اند. بنابراین $P(d|M)$ تفسیر احتمالی است که در آن M توصیف مناسبی برای داده‌هاست. در عوض باید داده‌ها را با دقت بیشتری به منظور ساختن سؤالاتی از قبیل این‌که «چگونه دو مدل خاص مقایسه می‌شود؟» تهیه کنیم. نسبت‌های بخت پسین نیاز ما را برای دانستن همه فرضیه‌های پیشین از بین



شکل ۱: ایستگاه LIGO در هانفورد، واشنگتن (LHO)

(<https://www.nbcnews.com/science/science-news/advanced-ligo-facility-hits-milestone-hunt-gravity-waves-n361701>)



شکل ۲: ایستگاه LIGO در لیوینگستون، لوئیزیانا (LLO)

(<https://www.ligo.org/news/blind-injection.php>)

پارامترهای مدل اغلب شامل پارامتر مکان و پارامتر مقیاس هستند. پارامتر مکان به تعریف منشأ بستگی دارد. انتخاب توزیع پیشین باید نسبت به محل تغییرات مبدأ ناوردا باشد، یعنی $P(x|I) = 1/\Delta x$ که در آن $x_{min, max}$

پارامترهای مقیاس، مانند فاصله تا منبع انتشار نور، همیشه مثبت هستند. برای مثال، ادغام جرم ستاره‌های سیاه‌چاله‌ها از طریق LIGO به چند صد Mpc قابل کشف و شناسایی هستند. حالا فرض کنید یک پیشین یکنواخت در محدوده صفر تا 100 Mpc مورد نظر است. ۹۰ درصد نمونه‌ها در دهک‌های پایانی توزیع خواهند بود. بنابراین استفاده از لگاریتم پارامتر مقیاس در مدل‌سازی یا متناسب کردن یک پیشین جفریز برای پارامتر مقیاس x عمومی‌تر است و لذا

$$P(x|I) = \frac{1}{x \ln\left(\frac{x_{max}}{x_{min}}\right)}$$

یک کاربرد مناسب استفاده از مشاهدات نجومی متعارف به عنوان یک محرک برای جست و جوی امواج گرانشی مستقیم است. به عنوان مثال تجزیه و تحلیل LIGO برای ابرنواخترها و انفجار اشعه گاما انجام شده است. مشاهدات نجومی می‌توانند به محدوده مکان رویدادها کمک کند و این‌که

3. posterior maximum point

1. LIGO Hanford Observatory
2. LIGO Livingston Observatory

۲-۲ الگوریتم‌های زنجیرهای مارکوف مونت کارلویی

تکنیک‌های زنجیرهای مارکوف مونت کارلویی (MCMC) در مسائل به حداقل رساندن ابعاد بزرگ حاضر شده‌اند [۶] و در رابطه با مجموعه‌ی امواج گرانشی، به اثر بخشی بزرگ خود در مسأله برآورد پارامتر کمک می‌کنند. تکنیک‌های مشابه دیگری هم برای این منظور وجود دارد (۹، ۶، ۴). دیدگاه MCMC یک مجموعه قدرتمند از روش‌هایی برای تولید نمونه از توزیع پسین را در بر می‌گیرد. نمونه‌برداری مستقیم از تابع احتمال‌های مورد نظر به دلیل نیاز به ارزیابی درستنمایی‌های کناری مانند افزایش ابعاد مدل پرهزینه هستند. فرض کنید نمونه‌های (x_i, x_{i+1}) به‌طور مستقل از یک تابع توزیع هدف π گرفته شده باشند و در شرایط تعادل

$$\pi(x_i)P(x_{i+1}|x_i) = \pi(x_{i+1})P(x_i|x_{i+1}) \quad (2)$$

صدق کنند که در آن احتمال انتقال از x_i به x_{i+1} است. در اصل، اگر احتمال انتقال را می‌دانستیم به راحتی می‌توانستیم نمونه‌هایی از توزیع هدف را تولید کنیم که متأسفانه این حالت اتفاق نمی‌افتد. بنابراین $P(x_{i+1}|x_i)$ را با توزیع پیشنهادی دلخواه $q(x_{i+1}|x_i)$ جایگزین می‌کنیم که احتمال پیشنهاد یک حرکت x_{i+1} است با توجه به این که در x_i هستیم. بدون از دست دادن کلیت فرض می‌کنیم که سمت چپ معادله (۲) با انتخابمان از توزیع پیشنهادی بیشتر مورد توجه است، یعنی $\pi(x_i)q(x_{i+1}|x_i) > \pi(x_{i+1})q(x_i|x_{i+1})$ برای بازبایی شرط بالا باید احتمال پذیرش $\kappa(x_{i+1}|x_i)$ (احتمال پذیرش حرکت پیشنهادی) را در هر یک از جهت‌های نامساوی در نظر گرفت که منجر به معادله زیر می‌شود:

$$\pi(x_i)q(x_{i+1}|x_i)\kappa(x_{i+1}|x_i) = \pi(x_{i+1})q(x_i|x_{i+1})\kappa(x_i|x_{i+1}). \quad (3)$$

پیشنهاد می‌شود که $\kappa(x_i|x_{i+1}) = 1$ در نظر گرفته شود. پس می‌توانیم معادله (۳) را برای حل احتمال پذیرش انتقال از x_i به x_{i+1} دوباره بازنویسی کنیم:

$$\kappa(x_{i+1}|x_i) = \frac{\pi(x_{i+1})q(x_i|x_{i+1})}{\pi(x_i)q(x_{i+1}|x_i)}$$

و جمله سمت راست معادله بالا نسبت هستینگ (H) نامیده می‌شود. برای اطمینان از این که $\kappa(x_{i+1}|x_i)$ یک احتمال است، قرار می‌دهیم $\kappa(x_{i+1}|x_i) = \min[1, H]$

در حل مسأله برآورد پارامتر، مایل به استنباط تابع توزیع پسین پارامترهای $\vec{\theta}$ مدل هستیم. تابع احتمال با اولین انتخاب از بین برخی اعضای نمونه در فضای پارامتری $\vec{\theta}_x = \vec{\theta}_i$ به عنوان اولین «اتصال» در زنجیر قابل محاسبه است. حرکت بعدی به موقعیت جدید $\vec{\theta}_y = \vec{\theta}_{i+1}$ با استفاده از یک توزیع نرمال شده $q(\vec{\theta}_y|\vec{\theta}_x)$ پیشنهاد شده و مکان پیشنهادی $\vec{\theta}_y$ با احتمال $\kappa[1, H]$ با استفاده از نسبت هستینگ گرفته شده است:

$$H_{\vec{\theta}_x \rightarrow \vec{\theta}_y} = \frac{P(d|\vec{\theta}_y)P(\vec{\theta}_y)q(\vec{\theta}_x|\vec{\theta}_y)}{P(d|\vec{\theta}_x)P(\vec{\theta}_x)q(\vec{\theta}_y|\vec{\theta}_x)}$$

می‌برد و منجر به یک اندازه اطمینان کمی به اسم نسبت بخت برای یک مدل، نسبت به بقیه می‌شود، یعنی:

$$O_{10} = \frac{P(M_1|d)}{P(M_0|d)} = \frac{P(M_1)P(d|M_1)}{P(M_0)P(d|M_0)}$$

که ساده‌ترین تفسیر را به عنوان «بخت شرط‌بندی» M_1 روی M_0 دارد. اگر $O_{10} = x$ ، M_1 به M_0 با بخت x به ۱ ترجیح دارد.

نسبت بخت تقریباً برابر با یک، این معنی را می‌دهد که هر دو مدل وضعی برابر دارند و هر دو مدل می‌بایست مورد توجه قرار گیرند. به‌طور کلی، وقتی که ارجحیت با M_1 باشد، نسبت بخت بزرگ‌تر یا مساوی با سه است.

نسبت‌های بخت معمولاً به دو جزء تجزیه می‌شود: بخت پیشین $\rho_{10} = P(M_1)/P(M_0)$ که هر اولیونی را بین مدل‌هایی که قبل از آزمایش تهیه شده‌اند منعکس می‌کند در حالی که عامل بیز $\beta_{10} = P(d|M_1)/P(d|M_0)$ نسبت درستنمایی‌های یک مدل روی دیگری، در تعریف داده‌های موجود است.

اگر دو مدل خصوصیتی شبیه به هم داشته باشند در «برازش» به داده‌ها، مدل با کم‌ترین بعد ترجیح داده می‌شود. بنابراین پارامترهای اضافی مدل باید توسط داده‌ها محدود شوند.

برای مثال فرض کنید که به دو مدل M_0 و M_1 علاقه‌مند هستیم و می‌خواهیم عامل بیز بین آن‌ها را وقتی که داده توصیف شده d به کار گرفته می‌شود محاسبه کنیم. به علاوه فرض کنید M_1 دارای یک پارامتر واحد θ است و M_0 با $\theta = \theta_0$ پارامتری شده است. در این مثال یک پیشین یکنواخت برای θ روی محدوده $\Delta\theta$ در نظر گرفته فرض می‌کنیم درستنمایی برای مدل M_1 نرمال با میانگین θ_{MAP} و واریانس σ^2 است. شواهد حاشیه‌ای برای M_0 فقط درستنمایی $P(d|\theta_0, M_0)$ است. برای M_1 روی پارامترهای مدل انتگرال‌گیری می‌کنیم:

$$\begin{aligned} P(d|M_1) &= \int_{\Delta\theta} P(\theta|M_1)P(d|\theta, M_1)d\theta \\ &= \frac{1}{\Delta\theta} \int_{\Delta\theta} P(d|\hat{\theta}, M_1)d\theta \\ &= P(d|\hat{\theta}, M_1) \frac{\delta\theta}{\Delta\theta} \end{aligned}$$

که در آن $\delta\theta$ ثابت نرمال‌ساز است. عامل بیز برای این دو مدل عبارت است از:

$$\beta_{10} = \frac{P(d|\hat{\theta}, M_1)}{P(d|\theta_0, M_0)} \frac{\delta\theta}{\Delta\theta}$$

تابع توزیع پسین کناری پارامترهای نامحدود با مقادیر توزیع پیشین تطبیق داده می‌شود، به این معنی که داده‌ها از به‌روزرسانی فهم ما راجع به پارامتر ناتوان بوده‌اند و پاسخ‌گوی سؤالاتی که داده‌ها «متعلق» به مدل هستند یا نه نیستند.

در برآورد شیب مطالعاتی انجام شده است و در بسیاری از حالات که خطای اندازه‌گیری ناچیز است، می‌توان این حقیقت را مشاهده کرد. برای مثال در حالتی از آزمون سطح روشنایی تولمن معمولاً خطا در انتقال به سرخ ناچیز است که با خطا و پراکندگی ذاتی در سطح روشنایی مقایسه می‌شود. در [۷] به تطبیق خطای اندازه‌گیری ناهم‌وابستگی و پراکندگی ذاتی که یکی از مشکلات برجسته در برازش خطی است، اشاره می‌شود. تنها روش‌های برازشی موجود متداول، با ناهم‌وابستگی خطای اندازه‌گیری ارتباط برقرار می‌کنند که اساس این فرض درست است که متغیرها در غیاب خطای اندازه‌گیری، پراکندگی ذاتی ندارد. این نقطاتی که به درستی فرض شده‌اند یک خط راست و یک همبستگی را نشان می‌دهند [۷].

در این مقاله مشکلات مهم برازش مدل‌های برازشی با داده‌هایی که دارای خطای اندازه‌گیری ناهم‌وابستگی از معلوم بودن انحراف معیار، و مجهول بودن پراکندگی ذاتی هستند را نشان می‌دهیم. تشخیص این‌که بین حالتی که مقدار خطای اندازه‌گیری به اندازه‌گیری وابسته است (در زبان آماری انحراف از معیار) و حالتی که نیست بسیار مهم است. هر دو مورد در مجموعه داده‌های نجومی استفاده می‌شوند (مثلاً مشاهدات با زمینه محدود شده در مقابل منابع محدود شده). در حالتی که وابستگی، وابسته به مشاهدات باشد، روند وزن اندازه‌گیری‌ها بر اساس وابستگی خطا، محاسبه می‌شوند. در اینجا دو روش برازشی متفاوت را تعریف می‌کنیم که هر دو روش فقط به برازش خطی وابسته هستند. روش اول تعمیمی مستقیم از برآوردگر کمترین مربعات معمولی (OLS) و روش دوم برآوردگر کمترین مربعات وزن‌دار (WLS) است که فقط وقتی متغیر پاسخ، خطای اندازه‌گیری باشد و مقدار آن به مشاهدات وابسته نباشد مورد استفاده قرار می‌گیرد. در اینجا تنها به برازش خطی ساده (یعنی مدل با یک متغیر توضیحی) بررسی می‌شود. از برازش نیمساز ($BCES(X_2|X_1)$) خطاهای همبسته‌ی دو متغیره و پراکندگی‌های ذاتی) برای ارائه تعمیم $OLS(X_2|X_1)$ استفاده می‌کنیم که باقیمانده X_2 را کمینه می‌کند. در ادامه فقط به حالتی که متغیر پاسخ، موضوع خطای اندازه‌گیری است توجه می‌کنیم که بزرگی بستگی به اندازه‌گیری ندارد. بعد از آن برازش نیمساز $BCES$ و برازش $BCES$ متعامد مطرح می‌گردند که این خطوط برازش با جملات $BCES(X_2|X_1)$ و $BCES(X_1|X_2)$ تعریف می‌شوند. در انتها این روش را برای یک مجموعه داده نجومی اجرا می‌کنیم و از شبیه‌سازی برای محاسبه برآوردگر $BCES$ (برای رابطه رنگ درخشندگی) و برآوردگر WLS (برای آزمون تولمن) استفاده می‌کنیم. همان‌طور که اشاره شد همبستگی‌های اختر فیزیکی مشاهده شده برای نشان دادن پراکندگی‌ها به هر دو عامل طبیعی و خطای اندازه‌گیری بستگی دارند. به هر حال انواع مختلف خطاهای اندازه‌گیری تأثیرات متفاوتی دارد. در این حالت دو فرق اساسی وجود دارد. یکی این‌که خطای اندازه‌گیری مستقل از متغیرهاست و دیگر این‌که خطای اندازه‌گیری به اندازه‌گیری وابسته است. اگر خطای اندازه‌گیری متغیرهای مستقل وجود داشته باشد، شیب OLS تحت تأثیر آن قرار می‌گیرد در صورتی که اگر مقدار خطای اندازه‌گیری به اندازه‌گیری وابسته باشد، هیچ یک از دو برآوردگر WLS و OLS معتبر

در عمل، K را با عدد تصادفی γ که از $U[0,1]$ گرفته شده است مقایسه می‌کنیم. اگر $\gamma > K$ حرکت رد می‌شود و $\theta_{i+1} = \theta_x$ و اگر $\gamma < K$ موقعیت جدیدی پذیرش می‌شود و $\theta_{i+1} = \theta_y$ است.

یک عمل رایج، انتخاب توزیع پیشنهادی متقارن است که بدین ترتیب نیاز آن در محاسبه هستینگ از بین می‌رود. انتخاب $q(\vec{\theta}_y|\vec{\theta}_x)$ توسط ساختار نمی‌تواند تابع توزیع پسین بهبود یافته را تغییر دهد. اگرچه توزیع پیشنهادی متأثر از نرخ پذیرش موقعیت‌های آزمایش در فضای پارامتری است، تعداد تکرارها برای نمونه توأم باید رضایت‌بخش باشد. تکرار اولیه، به عنوان «سوخته» در نمونه‌ها زنجیر معرفی می‌شود که به احتمال زیاد در توزیع بیش از حد وزن زیادی دارند از این رو غیرمحمتمل است که مراحل مقدماتی اول زنجیر صحت توزیع هدف را نشان دهد. این نمونه‌های اولیه به طوری که تمام نمونه‌های باقیمانده دور ریخته شده‌اند، از یک توزیع ایستا (مانا) هستند. روش‌های MCMC قابل تعمیم هستند به عنوان مثال، با پرش معکوس زنجیر مارکوف مونت کارلویی (RJMCMC) که در آن نمونه‌هایی همزمان از مدل‌های پسین اصلی و مدل پسین برای مدل انتخابی ساخته می‌شوند. این روش عامل بیز را برای دو مدل رقیب به شکل $\beta_{10} = M_1/M_0$ محاسبه می‌کند.

۳- مدل خطی برای داده‌های نجومی و کاربرد آن در سطح روشنایی کهکشان

تحلیل برازش خطی کاربرد وسیعی در تحقیقات نجومی امروزه دارد. تشخیص ویژگی تعداد زیادی از مجموعه داده‌های نجومی در پراکندگی‌های ذاتی به علاوه در ناهم‌وابستگی (ناهم‌گونی وابستگی) خطای اندازه‌گیری وجود دارد. به عنوان مثال مقدار خطاها می‌تواند از مشاهده‌ای به مشاهده دیگر تغییر کند. یک مثال جالب در ستاره‌شناسی فراکهکشانی، روابط بین دمای اشعه ایکس و سرعت پراکندگی خوشه‌های کهکشانی است. در این مقاله رابطه وضوح رنگ حوزه کهکشان‌ها و رابطه تولی-فیشر و آزمون تولمن معرفی می‌گردند. تولمن در سال ۱۹۳۰ آزمونی جهت مقایسه بین درخشندگی سطوح در کهکشان‌های مختلف به عنوان تابعی از انتقال به سرخ معرفی کرد. رابطه تولی-فیشر نیز امکان اندازه‌گیری تابندگی یک کهکشان را از طریق اندازه‌گیری پهنای خط ۲۱ سانتی‌متری آن فراهم می‌کند. مشکل اساسی این روش این است که گرد و غبار به خوبی نور آبی را پراکنده می‌سازد، به طوری که مشاهده نور آبی کهکشان‌های دیگر تحت تأثیر مقدار نامعلومی از جذب ناشی از گرد و غبار کهکشان‌های خودی و گرد و غبار موجود در قرص‌های کهکشانی دیگر قرار می‌گیرد. دانشمندان متوجه شدند که نور مادون قرمز تحت تأثیر جذب قرار نمی‌گیرد و به خوبی با پهنای خطوط ۲۱ سانتی‌متری کهکشان‌های گروه محلی پیوند می‌یابند. بنابراین می‌توانیم تابندگی‌های مادون قرمز کهکشان‌ها را از پهنای خطوط ۲۱ سانتی‌متری آن‌ها استنتاج کنیم. از طریق مقایسه با شارهای مادون قرمز می‌توانیم فاصله و لذا مقداری را برای ثابت هابل به دست آوریم. نادیده گرفتن خطاهای اندازه‌گیری و پراکندگی‌ها به استنباط‌های نادرست فیزیک‌دانان نجومی منجر می‌شود. در مقاله [۱۶] به تفصیل روی اثرات پراکندگی‌های ذاتی و خطای اندازه‌گیری

نیستند حتی اگر متغیرهای مستقل اندازه‌گیری شده بدون خطا باشند و حتی اگر پراکندگی ذاتی وجود نداشته باشد.

۳-۱ برآوردگر $BCES(X_2|X_1)$

فرض کنید متغیرهای مورد علاقه با (X_{1i}, X_{2i}) و داده‌های مشاهده شده با $OLS(X_2|X_1)$ مشخص می‌شوند که در آن برای هر i ، V_i یک ماتریس 2×2 متقارن است که عناصر آن $V_{11,i}, V_{22,i}, V_{12,i}$ به ترتیب برای دو قطر و عنصر غیرقطری مشترک مشخص شده‌اند. داده‌های مشاهده شده به متغیرهای مورد علاقه مشاهده شده با $Y_{1i} = X_{1i} + \varepsilon_{1i}$ و $Y_{2i} = X_{2i} + \varepsilon_{2i}$ مرتبط می‌شوند که در آن خطاهای $(\varepsilon_{1i}, \varepsilon_{2i})$ یک توزیع دو متغیره با میانگین صفر دارند و به ازای هر i دارای ماتریس کوواریانس V_i است. فرض می‌کنیم که V_i ها از توزیع $(\varepsilon_{1i}, \varepsilon_{2i})$ هستند که به (Y_{1i}, Y_{2i}) وابسته‌اند و برای V_i معلوم، $(\varepsilon_{1i}, \varepsilon_{2i})$ از (X_{1i}, X_{2i}) مستقل هستند. همه مجموعه داده‌های نجومی نیاز به این فرضیات دارند. در بیشتر این حالات خطای اندازه‌گیری دو متغیر مستقل هستند و بنابراین به ازای هر i ، $V_{12,i} = 0$ و داده مشاهده شده به فرم $(V_{11,i}, V_{22,i}, V_{12,i})$ هستند که $V_{kk,i}$ واریانس ε_{ki} را به ازای $k = 1, 2$ مشخص می‌کند. بر طبق این فرض متغیرهای برازشی مورد علاقه از مدل برازشی ساده‌ی زیر پیروی می‌کنند:

$$X_{2i} = \alpha_1 + \beta_1 X_{1i} + e_i \quad (4)$$

که فرض می‌کنیم e_i دارای میانگین صفر است. می‌خواهیم ضرایب برازش‌هایی جزئی α_1 و β_1 را برآورد کنیم.

برآوردگر پیشنهادی $BCES(X_2|X_1)$ تعمیمی برای برآوردگر $OLS(X_2|X_1)$ است که برای تمامی مجموعه داده‌هایی که مدل خطای اندازه‌گیری را برازش می‌کنند معتبر است. این برآوردگرها بر پایه پارامترهای مدل (4) است که به گشتاورهای توزیع دو متغیره $(X_{1i}|X_{2i})$ مرتبط شده است. در حالت خاص:

$$\alpha_1 = E(X_{2i}) - \beta_1 E(X_{1i}), \quad (5)$$

$$\beta_1 = \frac{Cov(X_{1i}, X_{2i})}{V(X_{1i})}$$

در حالی که خطای اندازه‌گیری وجود نداشته باشد، برآوردگرها گشتاوری هستند و بنابراین با جابه‌جا کردن گشتاورهای جامعه در (5) به وسیله گشتاورهای نمونه به دست آمده‌اند. برآوردگرهای کلی، با جایگذاری گشتاورهای جامعه در (5) به وسیله گشتاورهایی که از داده‌های مشاهده شده در $OLS(X_2|X_1)$ به دست آمده‌اند مشخص می‌شوند. با استفاده از (4) و این حقیقت که با شرطی کردن $V_{kk,i}$ ، خطای ε_{ki} ($k = 1, 2$) میانگین صفر دارد، می‌توان نتیجه گرفت که $E(Y_{ki}) = E(X_{ki})$. همچنین:

$$E(Y_{ki}^2) = E(E(Y_{ki}^2|V_{kk,i}))$$

$$= E(E((Y_{ki} - X_{ki})^2 + X_{ki}^2 + 2X_{ki}(Y_{ki} - X_{ki})|V_{kk,i}))$$

$$= E(E(\varepsilon_{ki}^2 + X_{ki}^2 + 2X_{ki}\varepsilon_{ki}|V_{kk,i}))$$

$$= E(V_{kk,i}) + E(X_{ki}^2)$$

و

$$E(Y_{1i}Y_{2i}) = E(E(Y_{1i}Y_{2i}|V_{k,i}))$$

$$= E(E(\varepsilon_{1i}\varepsilon_{2i} + X_{1i}X_{2i} + X_{1i}\varepsilon_{2i} + X_{2i}\varepsilon_{1i}|V_{k,i}))$$

$$= E(V_{12,i}) + E(X_{1i}X_{2i})$$

و از این رو $C(Y_{1i}|Y_{2i}) = C(X_{1i}, X_{2i}) + E(V_{12,i})$

بنابراین برآوردگرهای گشتاوری به صورت زیر هستند:

$$\alpha_1 = E(Y_{2i}) - \beta E(Y_{1i}),$$

$$\beta_1 = \frac{C(Y_{1i}, Y_{2i}) - E(V_{12,i})}{V(Y_{1i}) - E(V_{11,i})}$$

که این رابطه تعمیم زیر از برآوردگر برای داده‌های با خطای اندازه‌گیری را پیشنهاد می‌کند:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_{1i} - \bar{Y}_1)(Y_{2i} - \bar{Y}_2) - \sum_{i=1}^n V_{12,i}}{\sum_{i=1}^n (Y_{1i} - \bar{Y}_1)^2 - \sum_{i=1}^n V_{11,i}} \quad (6)$$

که برآوردگرهای $BCES(X_2|X_1)$ برای شیب خط و عرض از مبدأ هستند که تعمیم برآوردگر $OLS(X_2|X_1)$ هستند. اگر برآوردهای

$$\hat{\xi}_{1i} = \frac{(Y_{1i} - E(Y_{1i}))(Y_{2i} - \beta_1 Y_{1i} - \alpha_1) + \beta_1 V_{11,i} - V_{12,i}}{V(Y_{1i}) - E(V_{11,i})}$$

و $\hat{\zeta}_{1i} = Y_{2i} - \beta_1 Y_{1i} - E(Y_{1i})\hat{\xi}_{1i}$ را به ترتیب با $\hat{\xi}_{1i}$ و $\hat{\zeta}_{1i}$ نشان دهیم که با جایگزین کردن میانگین نمونه به جای میانگین جامعه، واریانس نمونه به جای واریانس جامعه و $\hat{\alpha}_1$ و $\hat{\beta}_1$ به جای α_1 و β_1 به دست می‌آیند و فرض کنید که $(\hat{\xi}_{1i}, \hat{\zeta}_{1i})$ میانگین حسابی $(\hat{\xi}_{1i}, \hat{\zeta}_{1i})$ را مشخص می‌کنند و قرار دهیم:

$$\hat{\sigma}_{\beta_1}^2 = n^{-1} \sum_{i=1}^n (\hat{\xi}_{1i} - \bar{\xi}_1)$$

و

$$\hat{\sigma}_{\alpha_1}^2 = n^{-1} \sum_{i=1}^n (\hat{\zeta}_{1i} - \bar{\zeta}_1)$$

بنابراین واریانس $\hat{\beta}_1$ با $\hat{\sigma}_{\beta_1}^2 = n^{-1} \hat{\sigma}_{\beta_1}^2$ برآورد می‌شود و در نتیجه، با استفاده از به طور مجانبی نرمال بودن $\hat{\beta}_1$ که در ادامه نشان داده شده است، فاصله اطمینان $100(1 - \alpha)\%$ برابر است با $\hat{\beta}_1 \pm Z_{\alpha/2} \hat{\sigma}_{\beta_1} n^{-1}$ اکنون به اثبات رفتار مجانبی نرمال بودن $\hat{\beta}_1$ می‌پردازیم. در ابتدا تعریف می‌کنیم:

$$S_{Y_1}^2 = n^{-1} \sum_{i=1}^n (Y_{1i} - \bar{Y}_1)^2$$

و

$$S_{Y_1, Y_2}^2 = n^{-1} \sum_{i=1}^n (Y_{1i} - \bar{Y}_1)(Y_{2i} - \bar{Y}_2)$$

در این صورت:

$$\sqrt{n}(S_{Y_1, Y_2} - C(Y_1, Y_2)) =$$

۱- به دست آوردن $\hat{\alpha}_{OLS}$ و $\hat{\beta}_{OLS}$ به وسیله کاربرد مستقیم OLS روی داده‌های (Y_{2i}, X_{1i}) ،

۲- محاسبه باقیمانده‌های $\hat{\alpha}_{OLS} - \hat{\beta}_{OLS} X_{1i}$ ، $R_i = Y_{2i} - \hat{\alpha}_{OLS} - \hat{\beta}_{OLS} X_{1i}$

۳- به دست آوردن برآوردگر $V(e_i)$ از

$$\hat{V}(e_i) = n^{-1} \sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R}) - n^{-1} \sum_{i=1}^n V_{22,i}$$

و از این رو برآوردگر $V(e_i)$ سازگار (همگرا در احتمال) است. سپس قرار

می‌دهیم $\hat{V}(e_i^*) = \hat{\sigma}_i^{*2} = \hat{V}(e_i) + V_{22,i}$ فرض کنید A ماتریسی

$n \times n$ باشد که عناصر قطر آن $\hat{\sigma}_i^{*2}$ و عناصر غیرقطری آن مساوی با صفر

باشد. برای ارائه یک مسأله برازش ساده، این قاعده برآوردگرهای WLS زیر

را برای β_1 محاسبه می‌کند:

$$\hat{\alpha}_{WLS} = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{\sigma}_i^{*-2} X_{1i}^2 \sum_{i=1}^n \hat{\sigma}_i^{*-2} Y_{2i} - \sum_{i=1}^n \hat{\sigma}_i^{*-2} X_{1i} \sum_{i=1}^n \hat{\sigma}_i^{*-2} X_{1i} Y_{2i}}{\sum_{i=1}^n \hat{\sigma}_i^{*-2} \sum_{i=1}^n \hat{\sigma}_i^{*-2} X_{1i}^2 - (\sum_{i=1}^n \hat{\sigma}_i^{*-2} X_{1i})^2}$$

$$\hat{\beta}_{WLS} = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{\sigma}_i^{*-2} \sum_{i=1}^n \hat{\sigma}_i^{*-2} X_{1i} Y_{2i} - \sum_{i=1}^n \hat{\sigma}_i^{*-2} X_{1i} \sum_{i=1}^n \hat{\sigma}_i^{*-2} Y_{2i}}{\sum_{i=1}^n \hat{\sigma}_i^{*-2} \sum_{i=1}^n \hat{\sigma}_i^{*-2} X_{1i}^2 - (\sum_{i=1}^n \hat{\sigma}_i^{*-2} X_{1i})^2}$$

که برآورد واریانس این برآوردگرها عبارتند از:

$$\hat{V}(\hat{\beta}_{WLS}) = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{\sigma}_i^{*-2}}{\sum_{i=1}^n \hat{\sigma}_i^{*-2} \sum_{i=1}^n \hat{\sigma}_i^{*-2} X_{1i}^2 - (\sum_{i=1}^n \hat{\sigma}_i^{*-2} X_{1i})^2}$$

$$\hat{V}(\hat{\alpha}_{WLS}) = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{\sigma}_i^{*-2} X_{1i}^2}{\sum_{i=1}^n \hat{\sigma}_i^{*-2} \sum_{i=1}^n \hat{\sigma}_i^{*-2} X_{1i}^2 - (\sum_{i=1}^n \hat{\sigma}_i^{*-2} X_{1i})^2}$$

۳-۲ کاربرد در رابطه سطح روشنایی در کهکشان

رابطه سطح روشنایی (CL) برای کهکشان‌ها با برازش خطی رنگ

(C) در برابر قدر مطلق (M) مشخص شده است [۲]. اغلب C و M هر دو

شامل همین باند هستند، به طوری که خطاهای آن‌ها همبسته است. در

مطالعه رابطه CL از $OLS(X_2|X_1)$ استفاده شده که M در آن به عنوان

یک متغیر مستقل در نظر گرفته شده است. این برازش معمولی وزنی با

خطای X_2 (C) ندارد. برای تشخیص اندازه اریبی‌های موجود در استفاده از

آنالیز مدل‌های ناصحیح آماری، برد وسیعی از برازش مدل‌های برازش خطی

به رابطه CL برای دو زیر مجموعه از داده‌های [3] را مقایسه کرده‌ایم. این

زیر مجموعه کهکشان‌هایی را با نوع طیفی bk و نوع am یا fm تعریف

می‌کنند که در آن به دو جزء ستاره‌ای مربوط به پهنای باند کهکشان‌ها اشاره

دارد. مدل‌های « $BCES$ » شامل دو متغیر، خطاهای همبسته و پراکندگی-

های ذاتی هستند. مدل‌های « BES » شامل خطاهای دو متغیری و

پراکندگی‌های ذاتی اما بدون جمله همبستگی $V_{12,i}$ هستند. در نهایت مدل

« WBE » تنها برای حالت $(X_2|X_1)$ شامل وزنی با خطاهای دو متغیری

بدون همبستگی خطاها یا پراکندگی‌های ذاتی است. در حالتی که متغیر

پاسخ نرمال باشد از آزمون‌های نیکویی برازش و اگر نرمال نباشد از GLM

استفاده می‌کنیم. برای هر مدل برآورد تحلیلی و انحراف معیار روی اولین

$$n^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^n (Y_{1i} Y_{2i} - E(Y_1 Y_2)) - E(Y_1) n^{\frac{1}{2}} (\bar{Y}_2 - E(Y_2))$$

$$- E(Y_2) n^{\frac{1}{2}} (\bar{Y}_1 - E(Y_1)) + O_p(1)$$

$$\sqrt{n}(S_{Y_1}^2 - V(Y_1))$$

$$= n^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^n (Y_{1i}^2 - E(Y_1^2))$$

$$- 2E(Y_1) n^{\frac{1}{2}} (\bar{Y}_1 - E(Y_1)) + O_p(1)$$

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}_1 - \beta_1) = \sqrt{n} \left[\frac{S_{Y_1, Y_2} - \bar{V}_{12}}{S_{Y_1}^2 - \bar{V}_{11}} \right]$$

$$- \frac{C(V_{1i}, Y_{2i}) - E(V_{12,i})}{V(Y_{1i}) - E(V_{11,i})}$$

$$= \sqrt{n} \left[\frac{S_{Y_1, Y_2} - C(Y_{1i}, Y_{2i}) - (\bar{V}_{12} - E(V_{12,i}))}{V(Y_{1i}) - E(V_{11,i})} \right]$$

$$- [C(Y_{1i}, Y_{2i}) - E(V_{12,i})] \frac{S_{Y_1}^2 - V(Y_{1i}) - (\bar{V}_{11} - E(V_{11,i}))}{[V(Y_{1i}) - E(V_{11,i})]^2}$$

$$+ O_p(1)$$

$$= \sqrt{n}(\bar{\xi}_1 - E(\zeta_{1i})) + O_p(1)$$

و با توجه به قضیه حد مرکزی اثبات نرمال مجانبی بودن $\hat{\beta}_1$ کامل می‌شود.

به طور مشابه واریانس $\hat{\alpha}_1$ با $\hat{V}(\hat{\alpha}_1) = n^{-1} \hat{\sigma}_{\alpha_1}^2$ برآورد می‌شود.

همچنین فرض کنید $\hat{\sigma}_{\beta_1, \alpha_1}$ کوواریانس نمونه باشد که از $(\hat{\xi}_{1i}, \hat{\zeta}_{1i})$ به-

دست آمده است. پس کوواریانس بین $\hat{\beta}_1$ و $\hat{\alpha}_1$ با

$$C\hat{O}V(\hat{\beta}_1, \hat{\alpha}_1) = n^{-1} \hat{\sigma}_{\beta_1, \alpha_1}^2$$

برآورد می‌شود. این تابع کوواریانس برآورد شده می‌تواند برای ساختن یک

بیضی گون اطمینان همزمان برای $\hat{\alpha}_1$ و $\hat{\beta}_1$ مورد استفاده واقع شود.

در انتها برآوردگر WLS را برای حالتی که X_{1i} بدون خطا مشاهده شده

است تعریف می‌کنیم. این برآوردگر به فرض اضافی که خطای اندازه‌گیری

X_{1i} از X_{2i} مستقل است احتیاج دارد. ایده اصلی این است که در حضور

پراکندگی‌های ذاتی غیرقابل اغماض، وزن بهینه برای هر مشاهده‌ای با هر دو

واریانس خطای اندازه‌گیری برابر و پراکندگی‌های ذاتی ساخته شده است. در

نتیجه برای تعیین وزن بهینه ابتدا به برآورد پراکندگی‌های ذاتی احتیاج

داریم. در حالی که برای هر i ، $V_{11,i} = 0$ (که در پی آن $V_{12,i} = 0$)، از

رابطه (۴) داریم

$$V_{2i} = X_{2i} + \varepsilon_{2i} = \alpha_1 + \beta_1 X_{1i} + e_i^*$$

که در آن $e_i^* = e_i + \varepsilon_{2i}$. این ساختار ویژه برای کاربرد WLS ، باعث

می‌شود که $V(e_i^*)$ مستقل از Y_{2i} باشد. تحت این فرضیات داریم،

$V(e_i^*) = V(e_i) + V_{22,i}$ و در نتیجه با توجه به مجهول بودن

پراکندگی ذاتی، $V(e_i^*)$ نیز مجهول است.

روش‌های زیر را برای برآورد $V(e_i)$ پیشنهاد می‌کنیم:

متعامد به‌طور قابل توجهی اربب در شیب β_2 و β_4 برای $n = 50$ بوده است. وقتی β_1 مجموعه 0.12 بوده‌است، شیب برازش متعامد $BCES$ ، β_4 ، بهتر نسبت به $BCES(X_1|X_2)$ و شیب برازش نیمساز $BCES$ و β_3 و β_3 از هر دو نظر ارببی و واریانس برای $n = 150,500$ اجرا شد. روی اصل این نتایج شبیه‌سازی، استفاده از $BCES(X_2|X_1)$ برای مجموعه داده‌های سطح درخشندگی، مجموعه داده‌ها شبیه به آن‌چه در قبل ارائه شد، پیشنهاد می‌شود. یک هشدار مهم این است که مشخصات مختلف مدل‌ها ممکن است نتایجی متفاوت در اجرای برآوردگرها داشته باشد.

۴- کاربرد روش‌های بیزی برازش خطی در نجوم

برازش خطی کاربردهای فراوانی در نجوم دارد. بیشتر ویژگی‌های تحلیل‌های داده‌های نجومی پراکنش ذاتی حول برازش خطی هستند و به‌کار بردن برازش خطی ساده‌تر است. خطاهای اندازه‌گیری می‌توانند در هر دو متغیر مستقل و وابسته مؤثر باشند. خطاها ممکن است ناهمگون باشد. برای مشاهده کاربردهای آمار در اختر فیزیک می‌توان به [۸] مراجعه کرد. در [۱۰] یک روش بیزی موسوم به MLINMIX براساس تابع درست‌نمایی داده‌ها ارائه شد که [۱۲] این روش را با جایگزین کردن پیشین دریکله به‌جای استفاده از توزیع‌های آمیخته تعمیم داد. در تحلیل‌های نجومی اغلب به‌جای متغیرهایی مانند جرم سیاه‌چاله‌ها، جرم خوشه‌های کهکشانی و نرخ ستاره‌های تولید شده‌ی کهکشانی که قابل دسترس نیستند، به همبستگی بین مقادیر قابل مشاهده علاقه‌مند هستیم. در این مقاله در ابتدا به معرفی مفاهیمی چون مقیاس گذاری خطی، انحراف از خطی بودن، اندازه عدم قطعیت و پراکنش ذاتی می‌پردازیم و در انتها با شبیه‌سازی این مفاهیم را بررسی می‌کنیم.

۴-۱ مقیاس گذاری خطی

در اغلب روابط مقیاس در نجوم با زمان تحول سر و کار داریم. رابطه بین دو خاصیت به‌عنوان مثال مقدار قابل مشاهده O و جرم M ، $O \propto M^\beta F_Z^\gamma$ ، هست که β نما است و عامل انتقال به سرخ F_Z ممکن است $E_Z \equiv \frac{H(z)}{H_0}$ یا $Z - 1$ باشد که $H(z)$ انتقال به سرخ پارامتر وابسته به هابل است. در متغیرهای لگاریتمی، رابطه مقیاس خطی است و پراکنندگی‌ها نرمال هستند. یعنی $Y = \alpha + \beta X + \gamma T$ که در آن

$$Y = \log O, X = \log M, T = \log F_Z.$$

اگر از روش طیف‌سنج استفاده کنیم، اندازه‌گیری عدم قطعیت در انتقال به سرخ ناچیز است. متغیر زمان قطعی است و تحت تأثیر خطای اندازه‌گیری واقع نشده است. متغیر X هم تصادفی است. رابطه خطی بین دو مقدار غیر پراکنده که رابطه درخشندگی نسبت به دمای خوشه‌های کهکشانی را مشخص می‌کند را در نظر بگیرد:

$$Y_Z = \alpha_{Y|Z} + \beta_{Y|Z}Z + \gamma_{Y|Z}T + \delta_{Y|Z}ZT. \quad (7)$$

متغیر تصادفی Z مستقیماً از اندازه‌گیری مشخص نمی‌شود. برای مثال ما نمی‌توانیم جرم خوشه‌ها یعنی Z را اندازه‌گیری کنیم اما می‌توان آن را با جرم همگرایی ضعیف X تقریب زد. پس با توجه به معادله (۷) داریم:

$$X_Z = \alpha_{X|Z} + \beta_{X|Z}Z + \gamma_{X|Z}T + \delta_{X|Z}ZT$$

خط با نتایجی از ۱۰۰۰ شبیه‌سازی با دوباره نمونه‌گیری بوت-استرپ روی خط بعدی انجام شده است. همان‌طور که انتظار می‌رود از شیب سطحی و پراکنندگی قابل توجه در رابطه CL ، برازش $(X_1|X_2)$ (و در نتیجه نیمسازها) نسبت به برازش $(X_2|X_1)$ تندتر است. اگر رابطه CL به‌طور فیزیکی درک شده باشد پس مدل‌های « $BCES$ » باید استفاده شود، زیرا این مدل‌ها نتایج نارببی را دربر دارد. به هر حال، واریانس‌های $(X_2|X_1)$ و برازش متعامد برای همه مدل‌ها با این استثنا که عدم قطعیت بوت-استرپ به‌طور قابل توجهی کوچکتر هستند برای کهکشان‌های نوع bk و برای $(X_1|X_2)$ قابل مقایسه هستند. (در مقابل واریانس‌های $(X_1|X_2)$ و برازش نیمساز وقتی پراکنندگی‌های ذاتی و خطاهای اندازه‌گیری از مطالعات مدل‌های برازشی حذف شده‌اند بزرگ‌تر شده است). بنابراین شخص می‌تواند علاقه‌مند به این نتیجه‌گیری شود که مدل‌های WBE و $OLS(X_2|X_1)$ در مطالعات قبلی پذیرفته شده‌اند که برای مقایسه شیب برازش CL در انواع کهکشان‌های مختلف [۳] یا در انتقال به سرخ‌های متفاوت [۱۵] رضایت‌بخش هستند.

در حالی که این حالات برای مجموعه داده‌های ویژه که در اینجا مورد استفاده هستند، به نظر می‌رسد در مدل‌های OLS معمولی و WBE عملکرد نتایج اربب، و از این رو واریانس برآورد آنها لزوماً مقدار معنی‌داری نیست، زیرا مشمول اثرات ارببی مجهول نیستند. از این رو مدل $BCES$ باید حتی برای مقایسه شیب بین نمونه‌ها استفاده شود.

برای فهمیدن ارببی و صحت (با توجه به داده‌های کم) هر یک از این برازش‌ها، دو شبیه‌سازی با تولید مصنوعی مجموعه داده انجام می‌دهیم که با این کار دقت برازش به مشاهدات، توزیع‌های سطح روشنایی مشاهده شده طراحی می‌شود. یک مجموعه از شبیه‌سازی‌ها (X_{1i}, X_{2i}) ، $i = 1, \dots, n$ بر طبق مدل (۱) با $\alpha_1 = 2.5$ و $\beta_1 = 0.07$ تولید شده‌است. برد مقدار X_1 ، $(-28, -18)$ بوده و پراکنندگی ذاتی تولید شده برطبق توزیع نرمال با میانگین صفر و انحراف معیار 0.55 است. خطای اندازه‌گیری نرمال اضافه‌شده در مقدار (X_1, X_2) برای داده‌های مشاهده‌شده (Y_{1i}, Y_{2i}) ، $i = 1, \dots, n$ شبیه‌سازی شده است. برد واریانس خطاهای اندازه‌گیری $(0.18, 0.45)$ با کوواریانس ثابت 0.15 بوده است. مجموعه دوم از شبیه‌سازی‌ها با $\beta_1 = 0.12$ ، خطای اندازه‌گیری X_1 روی با واریانس اعم از $(0.03, 0.3)$ ، برد واریانس خطای اندازه‌گیری روی X_2 از $(0.06, 0.6)$ و برد کوواریانس دو خطای اندازه‌گیری $(0.03, 0.3)$ استفاده می‌شود. برای هر دو مجموعه شبیه‌سازی (Y_{1i}, Y_{2i}) ، داده‌ها را به طور تصادفی تولید می‌کنیم. V_i ها روال $BCES$ را طی می‌کنند و تمام پردازش‌ها ۱۰۰۰ بار تکرار شده است. نمونه‌هایی با حجم‌های $n = 50, 150, 500$ برای فهمیدن اثرات اندازه‌های نمونه‌های کوچک روی برآورد جزئی و واریانس تولید شده‌اند. برای این مطالعات شبیه‌سازی $(BCES(X_2|X_1))$ در هر رابطه بهتر اجرا شد. حتی با $n = 50$ ارببی‌ها کوچک بود و واریانس نمونه‌ها بیش از ۱۰۰۰ شبیه‌سازی همسانی نزدیکی با میانگین و واریانس‌های محاسبه شده از فرمول داشتند. واریانس β_1 کوچک‌تر از همه برآوردگرهاست. وقتی که شیب β_1 درست برابر با 0.07 بوده، $BCES(X_1|X_2)$ و $BCES$ برازش

داده می‌شوند. شکل توزیع‌ها نسبتاً تک مدی هستند و با زمان تحول می‌یابند. توزیع ذاتی Z می‌تواند با ترکیبی از تحول زمان n_{mix} توزیع نرمال تقریب زده شود [۱۰]:

$$Z \sim \sum_{\kappa=1}^n \pi_{\kappa} N(\mu_{Z,\kappa}(Z), \sigma_{Z,\kappa}^2(Z))$$

که در آن احتمال کشیدن نقاط داده از κ -امین مؤلفه است و

$$\sum_{\kappa=1}^n \pi_{\kappa} = 1.$$

فرض می‌کنیم که ترکیب مؤلفه‌ها، میانگین‌های مختلفی دارند و پراکنده هستند. میانگین هر مؤلفه (سیر تحول انتقال به سرخ) به آستانه مشاهدات متصل است و پراکندگی ذاتی مقادیر مشاهدات در انتخاب خوشه‌ها استفاده شده‌است. به‌عنوان نتیجه، تحول (میانگین) مؤلفه آمیخته می‌تواند به صورت زیر مدل‌بندی شود:

$$\mu_{Z,\kappa}(Z) = \mu_{Z,0\kappa} + \gamma_{\mu Z, FZ} T + \gamma_{\mu Z, D} \log D_Z$$

که در آن میانگین منبع انتقال به سرخ است. تحول انتشار به خواص پراکندگی‌های ذاتی مورد استفاده در انتخاب نمونه‌ها بستگی دارد. زمان تحول به صورت $\sigma_{Z,\kappa}(Z) = \sigma_{Z,0\kappa} F_Z^{\gamma_{\sigma Z, FZ}} D_Z^{\gamma_{\sigma Z, D}}$ مدل‌بندی شده است.

مدل بندی مناسب پراکندگی‌های ذاتی متغیرهای مستقل برای اصلاح اریبی ادینگتون بسیار مهم است.

۳-۴ انحراف از خطی بودن

پردازش‌های فیزیکی در مقیاس‌های مختلف اثرگذار هستند که ممکن است در مواردی انحراف از خطی بودن داشته باشند. جاذبه زمین نیروی محرکه شکل‌گیری و تکامل خوشه‌های کهکشانی است اما در مقیاس کوچک فیزیک ذرات سنگین می‌تواند نقش برجسته‌ای را بازی کند. به‌عنوان نتیجه، خطی بودن می‌تواند شکافی داشته باشد و به شکل یک خم باشد، به طوری که قبل از تفکیک مقیاس Z_{knee} ، مقیاس‌گذاری به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$Y_Z = \alpha_{Y|Z, knee} + \beta_{Y|Z, knee} Z + \gamma_{Y|Z, knee} T + \delta_{Y|Z, knee} ZT$$

که در آن $\alpha_{Y|Z, knee}$ نرمال شده‌است و سیر تحول زمان $\gamma_{Y|Z, knee}$ توسط نیاز برابری در انتقال Z_{knee} مشخص شده‌اند:

$$\alpha_{Y|Z, knee} = \alpha_{Y|Z} + (\beta_{Y|Z} - \beta_{Y|Z, knee})$$

$$\gamma_{Y|Z, knee} = \gamma_{Y|Z}$$

انتقال بین دو روش می‌تواند به صورت یک تابع انتقال با شکل S مدل‌سازی شود:

$$f_{knee} = \frac{1}{1 + \exp[Z - Z_{knee}/l_{knee}]}$$

که در آن مقیاس l_{knee} مجموعه طول انتقال است. رابطه روی تمام محدوده به صورت زیر است:

$$Y_Z = \alpha_{Y|Z} + \beta_{Y|Z} Z + \gamma_{Y|Z} T + \delta_{Y|Z} ZT + (Z_{knee} - Z) f_{knee}(Z) [(\beta_{Y|Z} - \beta_{Y|Z, knee}) + (\delta_{Y|Z} - \delta_{Y|Z, knee}) T].$$

که X_Z و Y_Z نسخه‌های پنهان مقیاس تصویر متغیر Z هستند و می‌توانند به عنوان یک ویژگی اساسی اجرامی مثل خوشه‌های کهکشانی در نظر گرفته شوند.

۴-۲ اندازه‌گیری عدم قطعیت، پراکنش و توزیع ذاتی

فرض کنید مقادیر اندازه‌گیری شده X و Y مقادیر آشکار X و Y باشند که همگی بردارهایی n عضوی هستند. با توجه به مشاهده عدم قطعیت، رابطه آن‌ها را می‌توان به صورت $\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i | \mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_i \sim N^{2D}(\{\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_i\}, \mathbf{V}_{\delta, i})$ بیان کرد که در آن توزیع گوسین دو متغیره است و $\mathbf{V}_{\delta, i}$ ماتریس کوواریانس عدم قطعیتی است که عناصر قطری آن با $\delta_{x, i}^2$ و $\delta_{y, i}^2$ و عناصر غیر قطری آن با $\rho_{xy, i} \delta_{x, i} \delta_{y, i}$ نشان داده می‌شود. متغیرهای $\mathbf{X}_{Z, i}$ ، $\mathbf{Y}_{Z, i}$ و \mathbf{Y}_i و \mathbf{X}_i متغیرهای معلومی هستند که تحت فرض خطی بودن مشخص می‌شوند.

پراکندگی‌ها چگونه نزدیکی توزیع داده‌ها را از حالت خطی اندازه‌گیری می‌کند. خواص واقعی اجرام نجومی X و Y که می‌توانیم برای اندازه‌گیری آنها تلاش کنیم، ذاتاً نسبت به متغیرهای پنهان X_Z و Y_Z مدل، پراکنده شده‌اند و بدون انحراف روی یک خط می‌افتند. خواص مشاهدات معمولاً دارای توزیع لگ نرمال، حول میانگین رابطه مقیاس است [۱۴]. فرض می‌کنیم که پراکندگی‌های ذاتی نرمال هستند:

$$\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_i | \mathbf{X}_{Z, i}, \mathbf{Y}_{Z, i} \sim N^{2D}(\{\mathbf{x}_{Z, i}, \mathbf{y}_{Z, i}\}, \mathbf{V}_{\sigma, i}) \quad (8)$$

که $\mathbf{V}_{\sigma, i}$ ماتریس کوواریانس پراکندگی‌های i -امین خوشه عناصر قطری هستند که توسط $\sigma_{X|Z, i}^2$ و $\sigma_{Y|Z, i}^2$ نشان داده شده‌اند و عناصر غیرقطری $\rho_{XY|Z, i} \sigma_{X|Z, i} \sigma_{Y|Z, i}$ هستند.

از آن‌جا که اشیاء با انتقال به سرخ بالا بیش‌تر نامنظم و کم‌تر کروی شکل هستند، معمولاً انتظار می‌رود پراکندگی‌ها با افزایش انتقال به سرخ زیاد شوند. درجه پراکندگی‌ها و سیر تحول آن‌ها به فیزیک ذرات سنگین وابسته است.

زمان سیر تحول پراکندگی‌ها و همبستگی بین آن‌ها می‌تواند به صورت زیر مدل‌بندی شود:

$$\sigma_{X|Z}^2(Z) = \sigma_{X|Z, 0} F_Z^{\gamma_{\sigma X|Z, FZ}} D_Z^{\gamma_{\sigma X|Z, D}}$$

$$\sigma_{Y|Z}^2(Z) = \sigma_{Y|Z, 0} F_Z^{\gamma_{\sigma Y|Z, FZ}} D_Z^{\gamma_{\sigma Y|Z, D}}$$

$$\sigma_{X, Y|Z}^2(Z) = \rho_{X, Y|Z, 0} F_Z^{\gamma_{\rho X, Y|Z, FZ}} D_Z^{\gamma_{\rho X, Y|Z, D}}$$

که در آن D_Z درخندگی یا اندازه فاصله زاویه‌ای است. اگر بخواهیم Y را در برابر X برازش کنیم، X و Z را می‌توانیم شناسایی کنیم. معادله (۸) به صورت زیر در می‌آید:

$$\mathbf{Y}_i | \mathbf{Z}_i \sim N(\mathbf{y}_{Z, i}, \sigma_{Y|Z, i}^2).$$

مدل‌سازی مناسب از توزیع متغیرهای مستقل بسیار مهم است. نمونه‌های در نظر گرفته شده در تحلیل‌های برازشی معمولاً نسبت به جامعه‌ی منشأ، اریب هستند. توزیع ذاتی متغیرهای مستقل، به شکل دو اثر اصلی درآمده است. از یک سو، اشیاء بسیار عظیم نادر هستند. از سوی دیگر، اشیاء بزرگ معمولاً بسیار رادیواکتیو هستند و راحت‌تر در فواصل بسیار بزرگ تشخیص

همین پردازش فیزیکی می‌تواند روی پراکندگی تأثیرگذار باشد که به صورت زیر مدل‌بندی می‌شود:

$$\sigma_{Y|Z}(Z, Z_{ref}) = \sigma_{Y|Z,0} + (\sigma_{Y|Z,0,knee} - \sigma_{Y|Z,0})f_{knee}(Z).$$

۴-۴ برازش خطی در نجوم و آمار بیز

روش‌های آماری بیزی به یک توزیع پیشین نیاز دارد. اگر هیچ حدسی بر پارامترها نداشته باشیم، پیشین‌ها غیر آگاهی‌بخش هستند. روش LIRA (برازش خطی در نجوم) همیشه برای مجموعه توزیع‌های پیشین از همه پارامترها به کار می‌رود. پیشین‌های استاندارد روی عرض از مبدأ $\alpha_{Y|Z}$ و روی میانگین مؤلفه‌های آمیخته $\mu_{Z,0,K}$ می‌تواند مسطح شود:

$$\alpha_{Y|Z} = \mu_{Z,0,K} \sim U(-n_L, +n_L)$$

که در آن عدد بزرگی است. در LIRA، مقدار پیش فرض $n_L = 10^4$ است.

شیب‌ها می‌توانند دارای توزیع استیودنت با یک درجه آزادی باشند یعنی که t_1 توزیع پیشین غیر آگاهی‌بخش پیشنهاد می‌شود:

$$\beta_{Y|Z}, \gamma_{Y|Z}, \gamma_{\mu_Z, E_Z}, \gamma_{\mu_Z, D} \sim t_1.$$

به طور پیش فرض، X شمارشگر Z و غیرپراکنده است و $\sigma_{X|Z,0} = 0$. پراکندگی همبستگی $\rho_{X,Y|Z,0}$ نزدیک به صفر است. و در غیر این صورت پیشین مسطح را می‌توان $\rho_{X,Y|Z,0} \sim U(-1,1)$ اتخاذ کرد. پارامترها در $Z - Y$ و $X - Z$ مقیاس‌گذاری شده‌اند. اگر مقدار Z را ندانسته باشیم، نمی‌توانیم همه آن‌ها را اندازه‌گیری کنیم. فرض می‌کنیم که X یک نماینده ناریب از Z است، یعنی

$$\alpha_{X|Z} = 0, \beta_{X|Z} = 1, \gamma_{X|Z} = 0, \delta_{X|Z} = 0.$$

برای روابط خطی، پارامترهای تثبیت شده $X - Z$ برخلاف رابطه $Y - Z$ تنها موضوع تغییر مقیاس است. برازش تنها می‌تواند رابطه اریبی بین X و Y را بررسی کند.

به‌طور پیش فرض، یک توزیع یک متغیره را برای مدل‌سازی توزیع‌های ذاتی متغیرهای مستقل مطرح کرده ($n_{mix} = 1$) و برای آمیخته کردن، توزیع دریکله را برای ضرایب احتمالات اتخاذ می‌کنیم، یعنی $\sum_{k=1}^{n_{mix}} \pi_k = 1$ که در آن $\pi_1, \dots, \pi_{n_{mix}} \sim Dirichlet(1, \dots, 1)$ تعداد اجزای آمیخته‌ی n_{mix} ثابت است. روش‌های جایگزین می‌توانند مقادیر بهینه اجزای نرمال را برای مدل‌بندی توزیع‌های ذاتی به واسطه فرایند دریکله مشخص نمایند. در حالت ساده برازش، مدل‌های خطی بدون شکستگی را اتخاذ می‌کند. خمی وجود ندارد و شیب $\beta_{Y|Z,knee}$ و شیب مسطح می‌توانند برای Z_{knee} و پیشین t استیودنت برای $\beta_{Y|Z,knee}$ و $\delta_{Y|Z,knee}$ در نظر گرفته شوند.

۴-۵ شبیه‌سازی

در بخش‌های قبلی چگونگی تقریب‌های دقیق را بررسی کردیم. رابطه مقیاس‌گذاری در حضور اغتشاش، پراکندگی و انتخاب اریبی‌ها می‌تواند بهبود یابد. ویژگی ضروری به شرح ذیل است:

متغیر مستقل Z از توزیع نرمال با میانگین $\mu_{Z,0} = 0$ و انحراف معیار $\sigma_{Z,0} = 0.3$ گرفته شده‌است. فرض می‌کنیم مقادیر Y به صورت $\alpha_{Y|Z} = 0, \beta_{Y|Z} = 1, \sigma_{Y|Z,0} = 0.1$ شبیه‌سازی شده‌است. X با Z شمرده می‌شود ($\alpha_{X|Z} = 0$ و $\beta_{X|Z} = 1$ و $\sigma_{X|Z,0} = 0.1$). دیگر پارامترهای مجموعه به طور پیش فرض صفر در نظر گرفته شده‌اند.

خطای اندازه‌گیری برای هر نقطه از داده‌ها متفاوت بوده‌است. واریانس‌های خطاهای اندازه‌گیری δ_X^2 و δ_Y^2 از توزیع ناوردای مقیاس χ^2 با کدرجه آزادی گرفته شده‌است. پارامترهای مقیاس، اندازه نوعی از خطاهای اندازه‌گیری که در مجموعه 0.1^2 بوده را بیان می‌کند. درجات مختلف همبستگی‌ها بین خطاهای اندازه‌گیری را شبیه‌سازی کرده‌ایم. همبستگی‌ها از توزیع یکنواخت $U[0,0.4]$ گرفته شده‌است.

در مورد نمونه‌هایی که دامنه انتقال به سرخ را می‌پوشانند، مقادیر پارامترهای فوق قبلاً در ارجاع به انتقال به سرخ نرمال شده بودند و $Z_{ref} = 0.01$. به طور پیش فرض سیر تحولی زمان مجموعه‌ای با $\gamma_{Y|Z} = 1$ و انتقال به سرخ از توزیع لگ نرمال گرفته شده‌است. $F_Z = E_Z$ به‌عنوان فاکتور زمان مطرح شده و فاصله‌های کیهانی را به‌عنوان اندازه فاصله زاویه‌ای محاسبه کردیم. برای هر مورد بررسی 10^3 مجموعه داده تولید کردیم که هر یک با $n_{sample} = 100$ نقطه داده به‌عنوان نوعی از نمونه‌های فعلی محاسبه شده‌اند. توزیع احتمال پسین توسط زنجیرهای مارکوف با نمونه-برداری گیبز تولید شده‌است. برای هر مجموعه داده میانه پارامترها را از زنجیر محاسبه کردیم و توزیع‌های میانه‌های اثرات کلی را مطالعه کردیم.

مدل‌سازی دقیق توزیع‌های ذاتی متغیرهای کمکی، در برازش خطی ناریب بسیار مهم است. با در نظر گرفتن یک توزیع نامتقارن، طرح شبیه‌سازی را از طرق رسم Z از یک توزیع نرمال چوله با پارامتر شکل $\alpha_{Z,0,skew} = 3$ اصلاح کردیم. در این حالت مکان و مقیاس پارامترهای ساخته‌شده با میانگین و انحراف معیار توزیع نرمال اصلی منطبق شده‌است. نتایج در جدول ۱ گزارش شده‌اند.

جدول ۱: مقایسه روش‌های LIRA و BCES

Parameter	Input	LIRA $n_{mix} = 1$	LIRA $n_{mix} = 3$	BCES
$\alpha_{Y Z}$	[0]	0.00±0.03	$Z = Z_{ref}$ 0.00±0.03	0.00±0.03
$\beta_{Y Z}$	[1]	1.02±0.12	1.01±0.11	1.02±0.15
$\sigma_{Y Z,0}$	[0.1]	0.09±0.03	0.09±0.03	0.13±0.01
			ارزیابی	
$\alpha_{X Z}$	[0]	-	انتقال به	
			سرخ	
$\beta_{Y Z}$	[1]	1.02±0.12		
$\gamma_{Y Z}$	[1]	0.83±0.45		
$\sigma_{Y Z,0}$	[0.1]	0.09±0.03		

بحث و نتیجه‌گیری

قضیه بیز کاربردهای زیادی در نجوم دارد که در این مقاله یکی از کاربردهای آن در تحلیل انفجار اشعه گاما و همچنین مدل‌های رگرسیونی بیزی مورد مطالعه قرار گرفتند. مدل‌های برازش خطی بیزی شامل تعداد زیادی پارامتر هستند که باید برآورد شوند. تجزیه و تحلیل مدل‌های سلسله مراتبی می‌تواند با شبیه‌سازی زنجیرهای مارکوف مونت کارلویی (MCMC) انجام شود. در حقیقت با استفاده از چارچوب بیزی بهترین برازش پارامتر تحت یک مدل خاص از داده‌های امواج گرانشی نجوم با الگوریتم زنجیرهای مارکوف مونت کارلویی مورد مطالعه قرار گرفت. از این‌که تمام رابطه‌های مدل به صورت احتمال شرطی بیان شده‌اند، توزیع پسین می‌تواند به صورت کارا و مؤثر با نمونه‌برداری گیز بررسی شود. در این مقاله یک مدل بیزی برای مطالعه روابط مقیاس زمان در حال تحول در نجوم مورد بررسی قرار گرفت. مشکلات مهم برازش مدل‌های برازش با داده‌هایی که دارای خطای اندازه‌گیری ناهم‌وابستگی از معلوم بودن انحراف معیار، و مجهول بودن پراکنندگی ذاتی هستند مورد تحلیل و بررسی قرار گرفت. از دو روش برازش برآورد کمترین مربعات معمولی و برآورد کمترین مربعات وزن‌دار استفاده شد که هر دو روش فقط به برازش خطی وابسته هستند. در ادامه برازش نیمساز و برازش متعامد نیز مطرح شدند و این روش با استفاده از یک مجموعه داده نجومی، از طریق شبیه‌سازی برای محاسبه برآوردگرها استفاده شد. همچنین LIRA برای مطالعات نجومی بهینه شد و نشان داده شد که انتقال به سرخ‌ها نقشی برجسته در روش‌های مطرح شده دارند. زمان‌های وابسته به شیب، نرمال بودن، پراکنش‌های ذاتی و همبستگی‌ها می‌توانند مشخص شوند. انحراف از خطی بودن و رابطه منحنی با امواج رادیویی می‌تواند برای آن‌ها محاسبه شود. درجه‌ای که انتخاب و روش آریبی را می‌تواند تحت تأثیر مطالعات جاری و نمونه‌های بعدی قرار دهد می‌تواند با یک سری از شبیه‌سازی‌ها مشخص شود. در اکثر مقالات نجومی از برازش خطی ساده استفاده می‌شود در صورتی که ممکن است برازش خطی چندگانه و یا بهره‌گیری از مدل‌های غیرخطی در بهبودی انتخاب مدل موثر باشد. به کمک شبیه‌سازی مفاهیمی چون مقیاس‌گذاری خطی، انحراف از خطی بودن، اندازه عدم قطعیت و پراکنش ذاتی بررسی شدند. در پایان برآوردگرهای BCES معرفی می‌شوند که در نجوم فراکهکشانی کاربرد دارند و این برآوردگرها را با WLS و OLS در یک مدل خطی رنگ در برابر بزرگی مطلق مقایسه شد.

منابع و مراجع

- [1] B.P. Abbott *et al.*, "Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger", *Phys. Rev. Lett.* 116, 061102 (2016).
- [2] W.A. Baum, "Population Inferences from Star Counts, Surface Brightness and Colors" Publications of the Astronomical Society of the Pacific, Vol. 71, No. 419 (1959), p.106-117
- [3] M.A. Bershad, "The optical and near-infrared colors of galaxies. 2: Spectral classification", *The Astronomical Journal*, vol. 109, no. 1669 (1995), p. 87-120
- [4] N. J. Cornish and J. Crowder, "LISA data analysis using Markov chain Monte Carlo methods", *Phys. Rev. D* 72, 043005 (2005).
- [5] N. J. Cornish and T. B. Littenberg, "Tests of Bayesian model selection techniques for gravitational wave astronomy", *Phys. Rev. D* 76, 2007.
- [6] N. J. Cornish and E. K. Porter, "MCMC exploration of supermassive black hole binary inspirals", *Class. Quant. Grav.* 23, S761 (2006).
- [7] E.D. Feigelson, & G.J. Babu, "Linear regression in astronomy. II", *Astrophysical Journal*, Part 1, vol. 397, no. 1 (1992), p. 55-67.
- [8] E. D. Feigelson, and G. J. Babu, *Modern Statistical Methods for Astronomy*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2012.
- [9] W. Hastings, "Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications", *Biometrika* 57, (1970) 97-109.
- [10] B. C. Kelly, Some Aspects Of Measurement Error In Linear Regression Of Astronomical Data, *The Astrophysical Journal*, 665, (2007), 1489-1506.
- [11] T. B. Littenberg, "Comprehensive Bayesian approach to gravitational wave astronomy", Ph.D. dissertation, United States -- Montana: Montana State University; 2009.
- [12] A. B. Mantz, A Gibbs Sampler for Multivariate Linear Regression, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 457, (2016), 1279-1288.
- [13] G. Schilling, "Flash! The hunt for the biggest explosions in the universe", Cambridge University Press, The Edinburgh Building, Cambridge CB2 2RU, UK, 2002.
- [14] R. Stanek, E. Rasia, A. E. Evrard, F. Pearce, and L. Gazzola, *Massive Halos in Millennium Gas Simulations: Multivariate Scaling Relations*, 715, (2010), 1508-523.
- [15] S.A. Stanford, P.R.M., Eisenhardt, & M. Dickinson, "Evolution of Infrared-selected Galaxies in Z approximately 0.4 Clusters", *Astrophysical Journal*, vol. 450 (1995), p.512.
- [16] J.A. Willick, "Calibration of the CCD Tully-Fisher relation with application to the Perseus-Pisces supercluster", Ph.D. thesis, University of California, Berkeley, 1991.