Scientific Researches in
Theoretical and Applied Physics
Vol. 1, Issue. 1, Spring 2023

Research Paper

Geometric Phase of Unbalanced qutrit-like Entangled Coherent State

Sanaz Mohammadi Almas*[1], Ghader Najjarbashi [2], Ali Tavana [3]

DOI:10.22034/STRAP.2023.15978

Reference to this article: Mohammadi Almas, S; Najarbashi, G; & Tavana, A. (2023). Geometric phase of unbalanced qutrit-like entangled coherent state. *Scientific Researches in Theoretical and Applied Physics*, *1*(1),57-63.

Keywords

Geometric phase, entangled coherent state, qutrit

Received: 2023/01/19

Accepted: 2023/02/20

Available: 2023/06/10

ABSTRACT

Advances in quantum information science have created new premises for geometric phase applications and new insights into its physical, mathematical, and conceptual nature. Geometric phases play an essential role in quantum information theory and quantum computing because they are independent of energy and dependent on the inherent geometry of state space. This paper investigates the geometric phase of the qutrit-like entangled coherent state undergoing a unitary evolution. We consider the two-partite unbalanced qutrit-like coherent state and transform it under rotational transformations. Then, we calculate the total, dynamical, and, geometric phases for a cyclic evolution. It has been shown that the total phase is zero under certain conditions, and as a result, the value of the dynamical phase is equal to the geometric phase. We also study the effect of the parameters involved in the problem on the geometric phase and conclude that the geometric phase is highly sensitive to the selection of parameters in the initial coherent state.

*** Corresponding Author: Sanaz Mohammadi Almas**
E-mail: sanazmohammadi@uma.ac.ir

1. College of Science. Mohaghegh Ardabili University. Ardabil Iran
2. College of Science. Mohaghegh Ardabili University. Ardabil Iran

مقاله پژوهشی

فاز هندسی حالت همدوس درهم‌تنیدهٔ کیوتریت گونهٔ نامتعادل

ساناز محمدی الماس[۱*]، قادر نجارباشی[۲]، علی توانا[۳]

DOI:10.22034/STRAP.2023.15978

ارجاع به این مقاله: محمدی الماس، ساناز؛ نجارباشی، قادر؛ توانا، علی. (۱۴۰۱). فاز هندسی حالت همدوس درهم‌تنیدهٔ کیوتریت گونهٔ نامتعادل. *پژوهش‌های علمی در فیزیک نظری و کاربردی*، ۱(۱) ۵۷-۶۳.

کلیدواژه‌ها

فاز هندسی، حالت همدوس درهم‌تنیده، کیوتریت

چکیده

پیشرفت علم اطلاعات کوانتومی محل جدیدی را برای کاربردهای فاز هندسی و همچنین بینش جدیدی را در مورد ماهیت فیزیکی، ریاضی و مفهومی آن ایجاد کرده است. فازهای هندسی به دلیل اینکه مستقل از انرژی و وابسته به هندسهٔ ذاتی فضای حالات هستند نقش مهمی در نظریهٔ اطلاعات کوانتومی و محاسبات کوانتومی دارند. این مقاله به بررسی فاز هندسی حالت همدوس درهم‌تنیدهٔ کیوتریت گونه تحت تحول یکانی می‌پردازد. حالت همدوس کیوتریت گونهٔ دو مدهٔ نامتعادل را درنظر گرفته و آن را تحت تبدیل‌های چرخشی قرار می‌دهیم. سپس فاز کلی، فاز دینامیکی و فاز هندسی را برای یک تحول دوره‌ای محاسبه می‌کنیم. نشان داده شده است که فاز کلی تحت شرایط خاصی صفر است و در نتیجه مقدار فاز دینامیکی با فاز هندسی برابر می‌شود. همچنین اثر پارامترهای دخیل در مسئله را بر روی فاز هندسی مطالعه کرده و نتیجه می‌گیریم که فاز هندسی حساسیت زیادی به انتخاب پارامترهای موجود در حالت همدوس اولیه دارد.

دریافت شده: ۱۴۰۱/۱۰/۲۹
پذیرفته شده: ۱۴۰۱/۱۲/۰۱
منتشر شده: ۱۴۰۲/۰۳/۲۰

* نویسنده مسئول: ساناز محمدی الماس
رایانامه: sanazmohammadi@uma.ac.ir

۱- دانشکده علوم. دانشگاه محقق اردبیلی. اردبیل. ایران.
۲- دانشکده علوم. دانشگاه محقق اردبیلی. اردبیل. ایران.

مقدمه

فاز هندسی آبلی[1] اولین‌بار توسط بری[2] [۱] برای حالت‌های کوانتومی خالص تحت تحول آدیاباتیک[3] و دوره‌ای[4] کشف شد. سپس برای حالت‌های مختلف از جمله فاز هندسی غیرآبلی [۲]، تحول‌های غیر آدیاباتیک [۳]، تحول‌های غیر دوره‌ای [۴، ۵]، حالت‌های مخلوط[5] [۶، ۷] و سیستم‌های باز[6] [۸، ۹، ۱۰] تعمیم داده شد. علاوه‌بر این، به زودی پس از کار بری، فاز هندسی را به حالت‌های همدوس[7] تعمیم‌یافته گسترش دادند [۱۱، ۱۲]. در ابتدا فاز هندسی آدیاباتیک برای حالت‌های همدوس مورد مطالعه قرار گرفت [۱۳]. متعاقباً، تعمیم غیرآدیاباتیک آن مورد تحقیق و بررسی قرار گرفت [۱۴، ۱۵]. همچنین، فاز هندسی غیردوره‌ای برای حالت‌های همدوس [۷] و فشرده[8] [۱۶] مورد بحث قرار گرفته است. برای مطالعات بیشتر در مورد فاز هندسی حالت‌های همدوس و فشرده، مراجع [۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰] را ببینید. با این حال، مراجع فوق همه به حالت‌های تک مده محدود می‌شوند و توجه کمی به مطالعهٔ فاز هندسی حالت‌های همدوس و فشردهٔ درهم‌تنیده شده است. فازهای هندسی کاربردهای زیادی در زمینه‌های مختلف فیزیک از جمله نظریهٔ اطلاعات کوانتومی و محاسبات کوانتومی [۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵]، فیزیک حالت جامد [۲۶، ۲۷] و اپتیک کوانتومی [۲۸، ۲۹] پیدا کرده‌اند. در این میان، فازهای هندسی به دلیل هندسی محض بودن می‌توانند به عنوان ابزار مناسبی برای تجزیه و تحلیل ویژگی‌های پدیده‌های نوری مورد استفاده قرار بگیرند. بررسی اثرات فاز هندسی در سیستم‌های درهم‌تنیده می‌تواند نقش مهمی در درک ماهیت درهم‌تنیدگی کوانتومی داشته باشد [۳۰]. از این رو، فاز هندسی حالت‌های درهم‌تنیده در سیستم‌های ترکیبی توجه بسیار بیشتری را به خود جلب کرده است. اگرچه فاز هندسی برای سیستم‌های اسپینی درهم‌تنیده به تفصیل مورد مطالعه قرار گرفته [۷، ۳۱، ۳۲، ۳۳، ۳۴]، اما فاز هندسی حالت‌های همدوس و فشردهٔ درهم‌تنیده کمتر مورد مطالعه قرار گرفته است. فاز هندسی حالت همدوس درهم‌تنیدهٔ دو مدهٔ کیوبیت گونه در مرجع [۳۵] بررسی شده است. فاز هندسی دو حالت همدوس درهم‌تنیدهٔ کیوبیت گونهٔ متعادل[9] و نامتعادل[10] تحت تحول یکانی و دوره‌ای محاسبه شده و با سنجهٔ تلاقی[11] حالت‌ها مقایسه شده است. علاوه‌بر آن فاز هندسی دوره‌ای برای حالت همدوس درهم‌تنیدهٔ کویتریت گونهٔ متعادل نیز مورد مطالعه قرار گرفته است [۳۶].

در این مقاله، فاز هندسی حالت همدوس خالص درهم‌تنیدهٔ کیوتریت گونه را مطالعه می‌کنیم. حالت همدوس کیوتریت گونهٔ نامتعادل را معرفی کرده و فاز هندسی حالت تعریف شده را تحت تحول یکانی و دوره‌ای محاسبه می‌کنیم. سپس، ویژگی‌های فاز هندسی و اثر پارامترهای دخیل در مسئله را بر روی فاز هندسی بررسی می‌کنیم.

1 Abelian geometric phase
2 Berry
3 Adiabatic
4 cyclic
5 mixed
6 open systems
7 coherent

فاز هندسی برای تحول‌های یکانی

فرض کنید یک حالت خالص بهنجار $|\psi(0)\rangle$ تحت تحول یکانی مسیر $C: t\in[0,\tau]\to|\psi(t)\rangle$ را در فضای هیلبرت تصویری می‌پیماید، با شرط $\langle\psi(0)|\psi(\tau)\rangle\neq 0$. فاز دینامیکی در طول این مسیر به‌صورت زیر محاسبه می‌شود [۶]:

$$\phi_{dyn}=-i\int_0^\tau dt\,\langle\psi(t)|\dot{\psi}(t)\rangle, \qquad ۱$$

که به وضوح به انرژی وابسته است. فاز هندسی وابسته به فضای هیلبرت تصویری به‌صورت تفاضل فاز دینامیکی از فاز کلی $\phi_{tot}=\arg\langle\psi(0)|\psi(\tau)\rangle$، تعریف می‌شود:

۲

$$\phi_{geo}=\arg\langle\psi(0)|\psi(\tau)\rangle+i\int_0^\tau dt\,\langle\psi(t)|\dot{\psi}(t)\rangle.$$

فاز هندسی، یک ویژگی مسیر C در فضای هیلبرت تصویری است. فاز هندسی ناوردای پیمانه‌ای[12] و ناوردای باز پارامتریزه[13] است [۶]. برای تحول‌های دوره‌ای و در حد آدیاباتیک، فاز هندسی به فاز بری [۲] کاهش می‌یابد. یک تعمیم بسیار مهم فاز بری در مرجع [۴] ارائه شده است که در آن نشان داده‌اند فاز بری با حذف شرط آدیاباتیک به فاز آهارونوف-آناندان[14] تبدیل می‌شود. این فاز به این دلیل اهمیت دارد که در فرآیندهای واقعی شرط آدیاباتیک دقیقاً حفظ نمی‌شود.

فاز هندسی حالت همدوس

حالت $|\alpha\rangle$ که به‌صورت ویژه‌حالت عملگر نابودی $\hat{a}$ با ویژه مقدار $\alpha\in\mathbb{C}$،

$$\hat{a}|\alpha\rangle=\alpha|\alpha\rangle. \qquad ۳$$

تعریف می‌شود، حالت همدوس نامیده می‌شود. می‌توان ثابت کرد حالت‌های همدوس در پایهٔ $|n\rangle$ به‌شکل زیر بیان می‌شود:

$$|\alpha\rangle=\exp(-\frac{|\alpha|^2}{2})\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle. \qquad ۴$$

ضرب داخلی دو حالت همدوس $|\alpha\rangle$ و $|\beta\rangle$ برابر است با:

$$\langle\alpha|\beta\rangle=\exp\{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2+|\beta|^2-2\alpha^*\beta)\}. \qquad ۵$$

حالت همدوس درهم‌تنیدهٔ دو مدهٔ نامتعادل زیر را در نظر می‌گیریم:

$$|\psi(0)\rangle=\frac{1}{\sqrt{N}}(|\alpha\beta\rangle+\mu_1|\beta\gamma\rangle+\mu_2|\gamma\alpha\rangle), \qquad ۶$$

8 squeezed
9 balanced
10 unbalanced
11 concurrence
12 gauge invariant
13 reparametrization invariant
14 Aharonov-Anandan

در اینجا μ_1 و μ_2 دو ضریب ثابت‌اند و N ضریب بهنجارش است که با رابطهٔ زیر داده می‌شود:

۷

$$N=1+\mu_1^2+\mu_2^2+2\mu_1 p_1 p_2+2\mu_2 p_1 p_3 \\ +2\mu_1\mu_2 p_2 p_3,$$

که در آن $p_1=\langle\alpha|\beta\rangle$ ، $p_2=\langle\gamma|\beta\rangle$ و $p_3=\langle\gamma|\alpha\rangle$. برای سادگی در ادامه همهٔ پارامترها را حقیقی در نظر می‌گیریم.

می‌خواهیم فاز هندسی حالت همدوس تعریف شده را تحت تحول یکانی و دوره‌ای محاسبه کنیم. بدین منظور تبدیل‌های چرخشی $e^{-i\phi\hat{J}.n}$ را به حالت اولیه اعمال می‌کنیم، که در آن ϕ و n به‌ترتیب زاویه و محور چرخش‌اند و $\hat{J}=\{\hat{J}_x,\hat{J}_y,\hat{J}_z\}$ مجموعه عملگرهای هرمیتی به‌صورت زیر بر حسب $\hat{a}(\hat{a}^\dagger)$ و $\hat{b}(\hat{b}^\dagger)$ عملگرهای فنا (خلق) داده می‌شوند:

$$\hat{J}_x=\frac{1}{2}(\hat{a}^\dagger\hat{b}+\hat{a}\hat{b}^\dagger),$$
۸
$$\hat{J}_y=\frac{1}{2i}(\hat{a}^\dagger\hat{b}-\hat{a}\hat{b}^\dagger),$$
$$\hat{J}_z=\frac{1}{2}(\hat{a}^\dagger\hat{a}-\hat{b}^\dagger\hat{b}).$$

مجموعه عملگرهای هرمیتی $\hat{J}$ در رابطهٔ جابجایی $[\hat{J}_i,\hat{J}_j]=\varepsilon_{ijk}\,i\hbar\hat{J}_k$ صدق می‌کنند.

عملگر یکانی $\hat{U}(\theta,\varphi)=e^{-i\varphi\hat{J}_z}e^{-i\theta\hat{J}_y}$ را که نشان‌دهندهٔ دو چرخش ابتدا حول محور y به اندازهٔ زاویهٔ θ و سپس حول محور z به اندازهٔ زاویهٔ φ است را در نظر می‌گیریم. با اثر عملگر $\hat{U}(\theta,\varphi)$ بر روی حالت اولیه، حالت تحول‌یافته به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

۹

$$|\psi(\theta,\varphi)\rangle=\frac{1}{\sqrt{N}}\{|\alpha'\rangle|\alpha''\rangle+\mu_1|\beta'\rangle|\beta''\rangle+ \\ \mu_2|\gamma'\rangle|\gamma''\rangle\},$$

که در آن $\alpha'\equiv e^{-i\frac{\varphi}{2}}(\alpha\cos\frac{\theta}{2}-\beta\sin\frac{\theta}{2})$،

$\alpha''\equiv e^{i\frac{\varphi}{2}}(\beta\cos\frac{\theta}{2}+\alpha\sin\frac{\theta}{2})$،

$\beta'\equiv e^{-i\frac{\varphi}{2}}(\beta\cos\frac{\theta}{2}-\gamma\sin\frac{\theta}{2})$،

$\beta''\equiv e^{i\frac{\varphi}{2}}(\gamma\cos\frac{\theta}{2}+\beta\sin\frac{\theta}{2})$،

$\gamma'\equiv e^{-i\frac{\varphi}{2}}(\gamma\cos\frac{\theta}{2}-\alpha\sin\frac{\theta}{2})$،

$\gamma''\equiv e^{i\frac{\varphi}{2}}(\alpha\cos\frac{\theta}{2}+\gamma\sin\frac{\theta}{2})$.

لازم به ذکر است که برای محاسبهٔ حالت تحول‌یافته روابط زیر مورد استفاده قرار گرفته‌اند:

$$\hat{U}^\dagger\hat{a}\hat{U}=e^{-i\frac{\varphi}{2}}(\hat{a}\cos\frac{\theta}{2}-\hat{b}\sin\frac{\theta}{2}),$$
۱۰
$$\hat{U}^\dagger\hat{b}\hat{U}=e^{i\frac{\varphi}{2}}(\hat{b}\cos\frac{\theta}{2}+\hat{a}\sin\frac{\theta}{2}),$$

که در آن از لم بیکر-هاسدورف[1] استفاده کرده‌ایم.

برای یک تحول دوره‌ای یعنی با ثابت نگه داشتن θ و تحول φ از 0 تا 2π، فاز کلی که به صورت $\phi_{tot}=\arg\langle\psi(0)|\psi(\theta,\varphi=2\pi)\rangle$ تعریف می‌شود، برابر است با:

۱۱

$$\phi_{tot}=\arg\{\frac{1}{N}e^{-(\alpha^2+\beta^2)(1+\cos\frac{\theta}{2})} \\
+\frac{\mu_1^2}{N}e^{-(\beta^2+\gamma^2)(1+\cos\frac{\theta}{2})}+\frac{\mu_2^2}{N}e^{-(\alpha^2+\gamma^2)(1+\cos\frac{\theta}{2})} \\
+\frac{\mu_1}{N}\exp(-\frac{1}{2}(\alpha^2+2\beta^2+\gamma^2 \\
+2(\beta^2-\alpha\gamma)\sin\frac{\theta}{2}+2\beta(\alpha+\gamma)\cos\frac{\theta}{2})) \\
+\frac{\mu_2}{N}\exp(-\frac{1}{2}(2\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \\
-2(\alpha^2-\beta\gamma)\sin\frac{\theta}{2}+2\alpha(\beta+\gamma)\cos\frac{\theta}{2})) \\
+\frac{\mu_1}{N}\exp(-\frac{1}{2}(\alpha^2+2\beta^2+\gamma^2 \\
-2(\beta^2+\alpha\gamma)\sin\frac{\theta}{2}+2\beta(\alpha+\gamma)\cos\frac{\theta}{2})) \\
+\frac{\mu_1\mu_2}{N}\exp(-\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2+2\gamma^2 \\
+2(\gamma^2-\alpha\beta)\sin\frac{\theta}{2}+2\gamma(\alpha+\beta)\cos\frac{\theta}{2})) \\
+\frac{\mu_2}{N}\exp(-\frac{1}{2}(2\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \\
+2(\alpha^2-\beta\gamma)\sin\frac{\theta}{2}+2\alpha(\beta+\gamma)\cos\frac{\theta}{2})) \\
+\frac{\mu_1\mu_2}{N}\exp(-\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2+2\gamma^2 \\
-2(\gamma^2-\alpha\beta)\sin\frac{\theta}{2}+2\gamma(\alpha+\beta)\cos\frac{\theta}{2}))\}.$$

1 Baker-Hausdorff lemma

طبق رابطهٔ بالا، حاصل‌ضرب داخلی دو تابع موج اولیه و نهایی عددی حقیقی است، بنابراین برای فاز کلی می‌توان نوشت:

۱۲

$$\phi_{tot}=\begin{cases}0 & \text{اگر} \quad \langle\psi(0)|\psi(\tau)\rangle>0\\ \text{تعریف نشده} & \text{اگر} \quad \langle\psi(0)|\psi(\tau)\rangle=0\\ \pi & \text{اگر} \quad \langle\psi(0)|\psi(\tau)\rangle<0\end{cases}$$

در نهایت با توجه به رابطه‌های ۱۱ و ۱۲، به‌ازای $\mu_1,\mu_2\geq 0$، فاز کلی همواره برابر با صفر و در نتیجه طبق رابطهٔ ۲، $\phi_{geo}=-\phi_{dyn}$ است.

با استفاده از رابطهٔ ۱، فاز دینامیکی به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

۱۳

$$\phi_{dyn}=2\pi\sin\theta\langle\psi(0)|\hat{J}_x|\psi(0)\rangle$$
$$-2\pi\cos\theta\langle\psi(0)|\hat{J}_z|\psi(0)\rangle),$$

که در آن

۱۴

$$\langle\psi(0)|\hat{J}_x|\psi(0)\rangle=\frac{1}{N}(\alpha\beta+\mu_1^2\beta\gamma+\mu_2^2\alpha\gamma$$
$$+\mu_1p_1p_2(\alpha\gamma+\beta^2)+\mu_2p_1p_3(\beta\gamma+\alpha^2)$$
$$+\mu_1\mu_2p_2p_3(\alpha\beta+\gamma^2)),$$

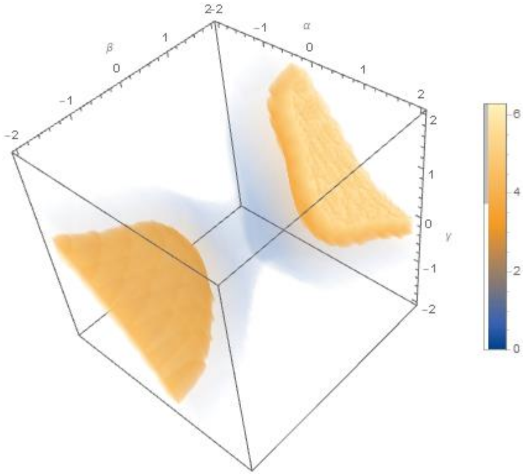
و

۱۵

$$\langle\psi(0)|\hat{J}_z|\psi(0)\rangle=\frac{1}{2N}(\alpha^2(1-\mu_2^2)$$
$$-\beta^2(1-\mu_1^2)-\gamma^2(\mu_1^2-\mu_2^2)$$
$$+2\mu_1p_1p_2\beta(\alpha-\gamma)+2\mu_2p_1p_3\alpha(\gamma-\beta)$$
$$+2\mu_1\mu_2p_2p_3\gamma(\beta-\alpha)).$$

بنابراین با معلوم بودن فاز کلی و فاز دینامیکی و با توجه به رابطهٔ ۲، فاز هندسی نیز به‌دست می‌آید. فاز هندسی وابسته به پارامتر θ، μ_1، μ_2 و پارامترهای همدوسی حالت اولیه یعنی α، β و γ است.

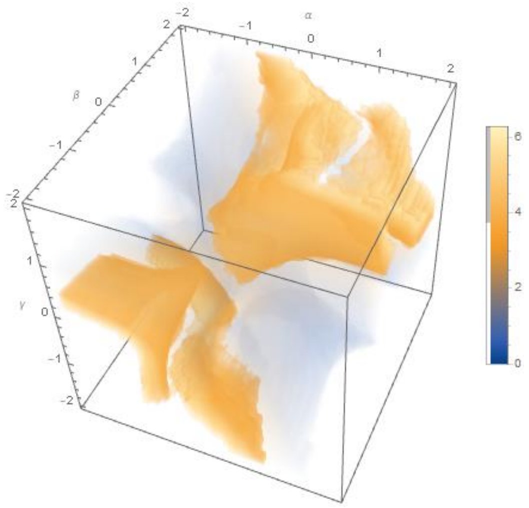
نمودار فاز هندسی برحسب پارامترهای همدوسی α، β و γ برای حالت خاص $\mu_1=\mu_2=1$ و $\theta=\frac{\pi}{4}$ در شکل ۱ نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که نمودار هذلولی گونه است. در مرکز و در محدودهٔ مجانب‌های هذلولی (نقاط آبی رنگ)، فاز هندسی کمترین مقدار و در نزدیکی کانون هذلولی (نقاط کرمی رنگ) فاز هندسی بیشترین مقدار خود را دارد. به عبارت دیگر فاز هندسی در ۱/۸ اول و آخر مکعب شکل ۱، بیشینه مقدار را دارد.



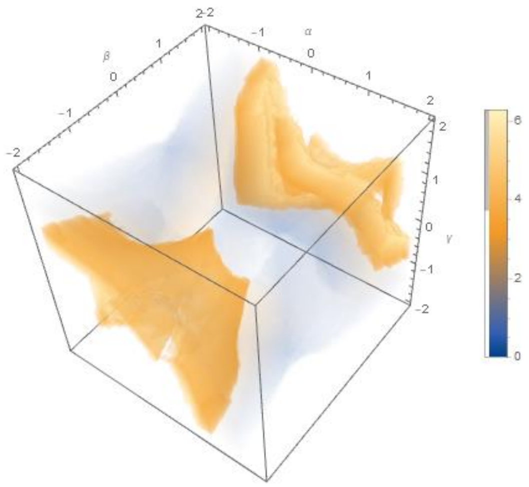
شکل۱. *فاز هندسی برحسب* α، β *و* γ *و به‌ازای* $\mu_1=\mu_2=1$ *و* $\theta=\frac{\pi}{4}$.

نمودار فاز هندسی برحسب پارامترهای همدوسی به‌ازای $\mu_1=\mu_2=-1$ در شکل ۲ و به‌ازای $\mu_1=-\mu_2=1$ در شکل ۳ رسم شده است. مشاهده می‌شود که نقاط اکسترمم نمودار همچنان در ۱/۸ اول و آخر مکعب شکل‌ها قرار دارد با این تفاوت که تقارن هذلولی گونی که در شکل ۱ وجود داشت از بین رفته است. همچنین در نقاط اکسترمم نمودار گسستگی وجود دارد، این بدان دلیل است که وقتی یکی از کمیت‌های μ_1 و μ_2 و یا هر دو آن‌ها منفی باشند، فاز کلی همیشه برابر با صفر نیست و وابسته به مقادیر پارامترهای همدوسی طبق رابطهٔ ۱۲ می‌تواند برابر با π باشد و همین مسئله باعث به وجود آمدن گسستگی‌هایی در نمودارها می‌شود.

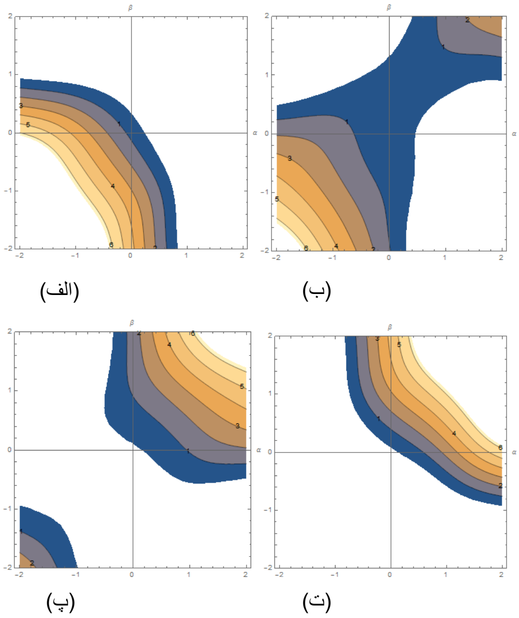
ویژگی‌های فاز هندسی حالت همدوس درهم‌تنیدهٔ کیوتریت گونهٔ متعادل در مرجع [۳۶] بررسی شده است. برای مقایسهٔ فاز هندسی دو حالت نامتعادل و متعادل، نمودار فاز هندسی بر حسب α و β به‌ازای مقادیر مختلف γ و با انتخاب $\mu_1=\mu_2=1$ و $\theta=\frac{\pi}{4}$، در شکل‌های ۴ و ۵ رسم شده است. نمودارها نشان می‌دهند که به‌ازای مقادیر کوچک α و β، فاز هندسی هر دو حالت نامتعادل و متعادل کمینه مقدار را دارد. مشاهده می‌شود که برای حالت متعادل، بیشینه مقدار فاز هندسی در هر چهار ناحیه اتفاق می‌افتد و نمودارها به‌ازای مقادیر مختلف γ تقریباً متقارن است، درحالیکه نمودارهای حالت نامتعادل، متقارن نیست.



شکل۲. فاز هندسی برحسب α، β و γ و به‌ازای $\mu_1=\mu_2=-1$ و $\theta=\frac{\pi}{4}$
.

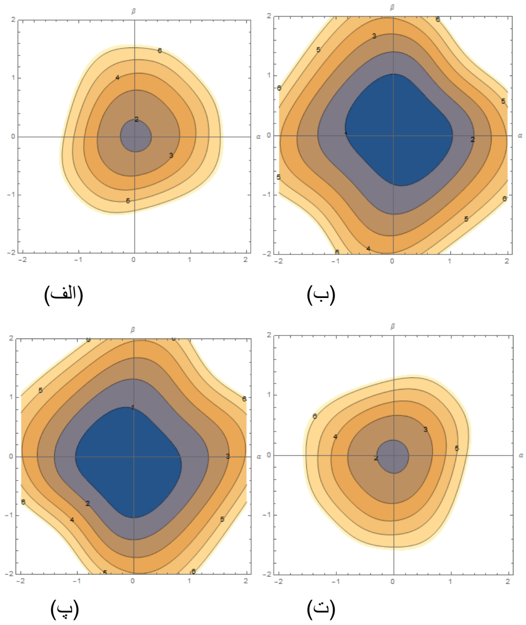


شکل۳. فاز هندسی برحسب α، β و γ و به‌ازای $\mu_1=1$، $\mu_2=-1$ و $\theta=\frac{\pi}{4}$.



شکل۴. *نمودار کانتوری فاز هندسی حالت نامتعادل برحسب* α *و* β *به‌ازای* $\mu_1=\mu_2=1$ و $\theta=\frac{\pi}{4}$.

الف: $\gamma=-1.5$. ب: $\gamma=-0.5$. پ: $\gamma=0.5$. ت: $\gamma=1.5$.



شکل۵. نمودار کانتوری فاز هندسی حالت متعادل برحسب α و β به‌ازای $\mu_1=\mu_2=1$ و $\theta=\frac{\pi}{4}$.

الف: $\gamma=-1.5$. ب: $\gamma=-0.5$. پ: $\gamma=0.5$. ت: $\gamma=1.5$.

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، فاز هندسی حالت همدوس کیوتریت گونهٔ دو مده را بررسی کرده‌ایم. فاز هندسی حالت همدوس نامتعادل تعریف شده را تحت تحول یکانی و دوره‌ای محاسبه کردیم. اثر پارامترهای دخیل در مسئله را بر روی فاز هندسی بررسی کردیم و نشان دادیم که به‌ازای $\mu_1,\mu_2 \geq 0$ ، فاز کلی برابر با صفر و در نتیجه مقدار فاز هندسی با مقدار فاز دینامیکی یکسان است. هنگامی که یکی از پارامترهای μ_1 و μ_2 و یا هر دوی آن‌ها منفی باشد، طبق رابطهٔ ۱۲ فاز کلی به‌ازای بعضی از پارامترهای همدوسی می‌تواند برابر با π باشد و به همین دلیل در نمودارهای فاز هندسی در بعضی از نقاط گسستگی ایجاد می‌شود (شکل‌های ۲ و ۳). بنابراین مقدار فاز هندسی به انتخاب کمیت‌های μ_1 و μ_2 حساسیت زیادی از خود نشان می‌دهد.

منابع و مراجع

[1] M. V. Berry, Quantal phase factors accompanying adiabatic changes, *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences* ***392*** (1984) 45-57.
https://doi.org/10.1098/rspa.1984.0023

[2] F. Wilczek, A. Zee, Appearance of gauge structure in simple dynamical systems, *Physical Review Letters* ***52*** (1984) 2111–2114.
https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.52.2111

[3] Y. Aharonov, J. Anandan, Phase change during a cyclic quantum evolution, *Physical Review Letters* ***58*** (1987) 1593.
https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.58.1593

[4] J. Samuel, R. Bhandari, General setting for berry's phase, *Physical Review Letters* ***60*** (1988) 2339.
https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.60.2339

[5] N. Mukunda and R. Simon, Quantum kinematic approach to the geometric phase. ii. the case of unitary group representations, *Annals of Physics* ***228*** (1993) 269–340.
https://doi.org/10.1006/aphy.1993.1094

[6] A. Uhlmann, Parallel transport and quantum holonomy along density operators, *Reports on Mathematical Physics* ***24*** (1986) 229-240.
https://doi.org/10.1016/0034-4877(86) 90055-8

[7] E. Sjöqvist, Geometric phase for entangled spin pairs, *Physical Review A* **62** (2000) 022109.
https://doi.org/10.1103/PhysRevA.62.022109

[8] A. Carollo, I. Fuentes-Guridi, M.F. Santos, V. Vedral, Geometric phase in open systems, *Physical review letters* ***90*** (2003) 160402.
https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.90.160402

[9] R.S. Whitney, Y. Gefen, Berry phase in a nonisolated system, *Physical review letters* ***90*** (2003) 190402.
https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.90.190402

[10] D. Tong, E. Sjöqvist, L.C. Kwek, C.H. Oh, Kinematic approach to the mixed state geometric phase in nonunitary evolution, *Physical review letters* ***93*** (2004) 080405.
https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.93.080405

[11] J. R. Klauder and B.-S. Skagerstam. *Coherent states: applications in physics and mathematical physics*. World scientific, (1985).

[12] W.-M. Zhang, R. Gilmore, *et al.*, Coherent states: theory and some applications, *Reviews of Modern Physics* ***62*** (1990) 867.
https://doi.org/10.1103/RevModPhys.62.867

[13] H. Kuratsuji and S. Iida, Effective action for adiabatic process: Dynamical meaning of berry and simon's phase, *Progress of theoretical physics* ***74*** (1985) 439–445.
https://doi.org/10.1143/PTP.74.439

[14] H. Kuratsuji, Geometric canonical phase factors and path integrals, *Physical review letters* ***61*** (1988) 1687.
https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.61.1687

[15] R. G. Littlejohn, Cyclic evolution in quantum mechanics and the phases of bohrsommerfeld and maslov, *Physical review letters* ***61*** (1988) 2159.
https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.61.2159

[16] I. Mendas, Pancharatnam phase for ordinary and generalized squeezed states, *Physical Review A* ***55*** (1997) 1514.
https://doi.org/10.1103/PhysRevA.55.1514

[17] S. Chaturvedi, M. Sriram, V. Srinivasan, Berry's phase for coherent states, *Journal of Physics A: Mathematical and General* ***20*** (1987) 1071.
https://doi.org/10.1007/BF02742688

[18] A.K. Pati, Geometric aspects of noncyclic quantum evolutions, *Physical Review A* ***52*** (1995) 2576.
https://doi.org/10.1103/PhysRevA.52.2576

[19] E. Sjöqvist and M. Hedström, Noncyclic geometric phase, coherent states, and the timedependent variational principle: application to coupled electron-nuclear dynamics, *Physical Review A* ***56*** (1997) 3417.
https://doi.org/10.1103/PhysRevA.56.3417

[20] D.-B. Yang, Y. Chen, F.-L. Zhang, J.-L. Chen, Geometric phases for nonlinear coherent and squeezed states, *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* ***44*** (2011) 075502.
https://doi.org/10.1088/0953-4075/44/7/ 075502

[21] P. Zanardi, M. Rasetti, Holonomic quantum computation, *Physics Letters A* ***264*** (1999) 94-99.
https://doi.org/10.1016/S0375-9601(99) 00803-8

[22] J.A. Jones, V. Vedral, A. Ekert, G. Castagnoli, Geometric quantum computation using nuclear magnetic resonance, *Nature* ***403*** (2000) 869-871.
https://doi.org/10.1038/35002528

[23] S.-L. Zhu and Z. Wang, Implementation of universal quantum gates based on nonadiabatic geometric phases, *Physical review letters* ***89*** (2002) 097902.
https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.89.097902

[24] V. Vedral, Geometric phases and topological quantum computation, *International Journal of Quantum Information* ***1*** (2003) 1-23.
https://doi.org/10.1142/S0219749903000024

[25] E. Rowell, Z. Wang, Mathematics of topological quantum computing, *Bulletin of the American Mathematical Society* ***55*** (2018) 183-238.
https://doi.org/10.1090/bull/1605

[26] A. Morpurgo, J. Heida, T. Klapwijk, B. Van Wees, G. Borghs, Ensemble-average spectrum of aharonov-bohm conductance oscillations: evidence for spin-orbit-induced berry's phase, *Physical review letters* ***80*** (1998) 1050.

[27] Q. Niu, X. Wang, L. Kleinman, W.-M. Liu, D. Nicholson, G. Stocks, Adiabatic dynamics of local spin moments in itinerant magnets, *Physical review letters* ***83*** (1999) 207.
https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.83.207

[28] S. Tiwari, Geometric phase in optics: Quantal or classical?, *Journal of Modern Optics* ***39*** (1992) 1097-1105.
https://doi.org/10.1080/09500349214551101

[29] E.J. Galvez, Applications of geometric phase in optics, *Recent Research Developments in Optics* ***2*** (2002) 165-182.

[30] E. Sjöqvist, Geometric phases in quantum information, *International Journal of Quantum Chemistry* ***115*** (2015) 1311-1326.

https://doi.org/10.1002/qua.24941
[31] D. Tong, L. Kwek, C. Oh, Geometric phase for entangled states of two spin-1/2 particles in rotating magnetic field, *Journal of Physics A: Mathematical and General* ***36*** (2003) 1149.
https://doi.org/10.1088/03054470/36/4/320
[32] D. Tong, E. Sjöqvist, L. Kwek, C. Oh, M. Ericsson, Relation between geometric phases of entangled bipartite systems and their subsystems, *Physical Review A* ***68*** (2003) 022106.
https://doi.org/10.1103/PhysRevA.68.022106
[33] R. A. Bertlmann, K. Durstberger, Y. Hasegawa, and B. C. Hiesmayr, Berry phase in entangled systems: A proposed experiment with single neutrons, *Physical Review A* ***69*** (2004) 032112.
https://doi.org/10.1103/PhysRevA.69.032112
[34] G. Najarbashi, B. Seifi, Quantum phase transition in the dzyaloshinskii-moriya interaction with inhomogeneous magnetic field: Geometric approach, *Quantum Information Processing* ***16*** (2017) 1-16.
https://doi.org/10.1007/s11128-016-1505-7
[35] S. Mohammadi Almas, G. Najarbashi, and A. Tavana, Geometric phase for two-mode entangled coherent states, *Int J Theor Phys* ***61*** (2022) 192.
https://doi.org/10.1007/s10773-022-05179-7
[36] S. Mohammadi Almas, G. Najarbashi, and A. Tavana, Geometric phase for two-partite qutrit-like entangled coherent state, *Journal of Research on Many-body Systems* ***12*** *(2022)* 51-64.
https://doi.org/10.22055/jrmbs.2022.17904