

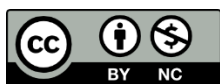
Research Paper



Optimization of Cut-off Frequency High-order Harmonic Generation form Hydrogen atom and H_2^+ Molecule Ion Using Plasmonic Field



Reza Aghbolaghi*¹, Soheila Majidi ¹, Ali Navid ¹, Reza Mokhlesi ¹



This paper is an open access and licenced under the CC BY NC licence.



DOI: [10.22034/strap.2024.18922](https://doi.org/10.22034/strap.2024.18922)

Reference to this article: Aghbolaghi, R; Majidi, S; Navid, A; Mokhlesi, R (2024). Optimization of Cut-off Frequency High-order Harmonic Generation form Hydrogen atom and H_2^+ Molecule Ion Using Plasmonic Field. *Scientific Researches in Theoretical and Applied Physics*, 2 (1): 1-5

Keywords

High Harmonic Generation, Plasmonic Field, Spherical nanoparticles, Cutoff frequency

Received: 2023/09/25

Accepted: 2024/04/06

Available: 2024/06/15

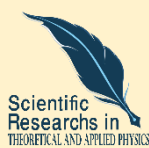
ABSTRACT

In this article, the cutoff frequency and high-order harmonic plateau region for hydrogen atom and molecular ion H_2^+ are theoretically investigated. The high-order harmonic generation (HHG) is a semi-classical process that results from the interaction of a strong laser field with matter. An attosecond pulse is produced from the superposition of harmonics in the plateau region of the HHG spectrum. Here, hydrogen atom and molecular ion are used for HHG and attosecond pulse generation, and Ti-Sapphire lasers with Gaussian pulse are used as a driving field. Plasmonic field is used to optimize the cutoff frequency of HHG spectrum. The simulation results show that the plasmonic field significantly enhances the HHG spectrum. Also, the dihydrogen molecular ion is more efficient for generate the high harmonic and a single attosecond pulse than hydrogen atom in the plasmonic field.

* Corresponding Author: Reza Aghbolaghi
E-mail: r.aghbolaghi@ubonab.ac.ir

1. Department of Laser and Optical Engineering, Faculty of Physics, University of Bonab, Bonab, Iran.

مقاله پژوهشی



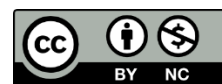
بهینه‌سازی فرکانس قطع تولید هماهنگ مرتبه‌بالا برای اتم هیدروژن و یون مولکولی H_2^+ با استفاده از میدان پلاسمونیک



رضا آقبلاغی^{*}، سهیلا مجیدی^۱، علی نوید^۱، رضا مخلصی^۱



این مقاله به صورت دسترسی باز و با لایسنس CC BY NC کرییتیو کامنز قابل استفاده است.



ارجاع به این مقاله: آقبلاغی، رضا؛ مجیدی، سهیلا؛ نوید، علی؛ مخلصی، رضا (۱۴۰۳). بهینه‌سازی فرکانس قطع تولید هماهنگ مرتبه‌بالا برای اتم هیدروژن و یون مولکولی H_2^+ با استفاده از میدان پلاسمونیک. پژوهش‌های علمی در فیزیک نظری و کاربردی، ۲ (۱): ۵-۱.

DOI: [10.22034/strap.2024.18922](https://doi.org/10.22034/strap.2024.18922)



چکیده

در این مقاله، فرکانس قطع و ناحیه تخت هماهنگ مرتبه‌بالا برای اتم هیدروژن و یون مولکولی H_2^+ به صورت نظری بررسی و شبیه‌سازی می‌شود. فرآیند تولید هماهنگ مرتبه‌بالا (HHG) یک فرآیند نیمه کلاسیکی است که نتیجه اندرکنش میدان قوی لیزری با ماده است. از برهم نهی هماهنگ‌های ناحیه تخت طیف HHG، پالس اتوتانیه تولید می‌شود. در اینجا برای فرآیند HHG و تولید پالس اتوتانیه، اتم هیدروژن و یون مولکولی استفاده می‌شود و برای میدان قوی لیزری از لیزرهای تیتانیوم سفایر با پالس گاوسی شکل به عنوان میدان قوی لیزری استفاده می‌شود. برای بهینه‌سازی فرکانس قطع طیف HHG از میدان پلاسمونیک استفاده می‌شود. نتایج شبیه‌سازی بیان می‌کند که استفاده از میدان پلاسمونیک، طیف HHG را به طور قابل ملاحظه‌ای بهینه می‌کند. همچنین نتایج نشان می‌دهند که استفاده از یون مولکولی دی هیدروژن در میدان پلاسمونیک برای فرآیند HHG و تولید تک پالس اتوتانیه مناسب و کارآمدتر از اتم آن است.

کلیدواژه‌ها

تولید هماهنگ بالا، میدان پلاسمونیک، نانوذرات کروی شکل، فرکانس قطع، میدان قوی لیزری

دریافت شده: ۱۴۰۲/۰۷/۰۳

پذیرفته شده: ۱۴۰۳/۰۱/۱۸

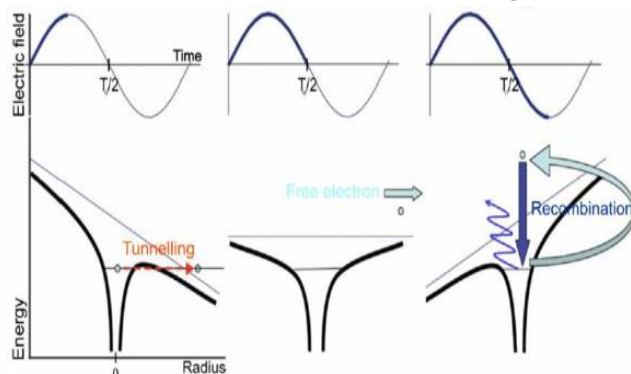
منتشر شده: ۱۴۰۳/۰۳/۲۶

* نویسنده مسئول: رضا آقبلاغی

رایانامه: r.aghbolaghi@ubonab.ac.ir

مقدمه

با پیشرفت علوم آتوتانیه و کاربردهای وسیع آن در سایر علوم دیگر، پژوهشگران در تلاش‌اند پالس آتوتانیه بهینه‌تری را تولید کنند [۱-۳]. تولید پالس آتوتانیه، را می‌توان به صورت تجربی از فرآیند تولید هماهنگ مرتبه بالا (HHG) به دست آورد. فرآیند HHG، یک فرآیند غیرخطی نیمه کلاسیکی سه مرحله‌ای است، تئوری کلاسیکی و کوانتومی آن به ترتیب توسط کورکوم [۴] و لونشتاین [۵] ارائه و تشریح شده است. مدل سه مرحله‌ای فرآیند HHG به این صورت بیان می‌شود: میدان قوی لیزری به ماده اندرکنشی (اتم، مولکول، یون و یون مولکولی) برخورد کرده و سبب خم شدن پتانسیل کولنی اتم می‌شود و ایجاد سدی می‌کند که الکترون می‌تواند از آن عبور کند. در مرحله اول: الکترون با تونل زنی از سد ایجاد شده وارد میدان الکتریکی می‌شود (شکل ۱ سمت چپ). در مرحله دوم الکترون مطابق با میدان لیزری حرکت کرده و انرژی جنبشی کسب می‌کند. زمانی که جهت میدان عوض می‌شود جهت حرکت الکترون هم عوض شده و به سمت یون مادر خود برمی‌گردد (شکل ۱ وسط). در مرحله سوم: الکترون در چاه پتانسیلی کولنی یون مادر خود به دام می‌افتد و انرژی جنبشی کسب شده در میدان لیزری و انرژی یونیزاسیون خود را به صورت فوتونی (در ناحیه XUV است) ساطع می‌کند (شکل ۱ سمت راست). مرحله دوم فرآیند کلاسیکی و مرحله اول و سوم فرآیند کوانتومی و است [۶].



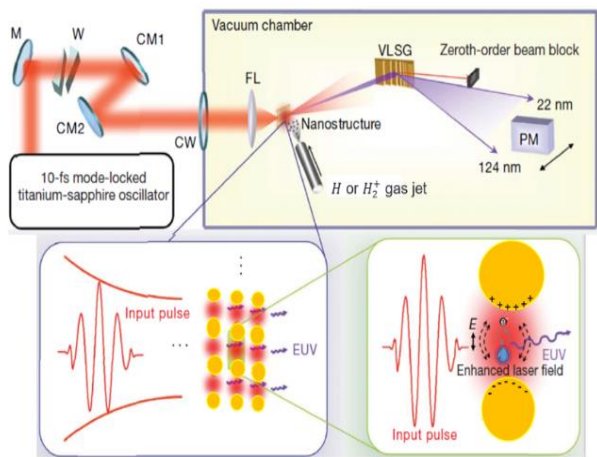
شکل ۱) شماتیک فرآیند سه مرحله‌ای HHG، نمایش هر مرحله همراه با میدان الکتریکی (بالا)

بهینه‌سازی هر یک از سه مرحله فرآیند HHG سبب بهبود انرژی فوتون ساطع شده (پالس آتوتانیه) می‌شود. با توجه به نتایج نیمه کلاسیکی، انرژی پالس آتوتانیه با پتانسیل یونیزاسیون و انرژی پاندوماتیو رابطه مستقیمی دارد. چون گازهای نجیب دارای انرژی یونیزاسیون بالایی هستند اکثراً برای فرآیند HHG از گازهای نجیب استفاده می‌کنند. با استفاده از یونیده کردن اتم پتانسیل یونیزاسیون اتم به طور چشم‌گیری افزایش می‌یابد. در اینجا، از اتم هیدروژن و یون مولکولی H_2^+ [۷] برای فرآیند HHG استفاده شده است. از مزیت‌های استفاده از یون مولکولی دو اتمی این است که پتانسیل یونیزاسیون بالایی دارند [۸] و برای باید از میدان قوی‌تری استفاده کرد. استفاده از میدان قوی‌تر سبب افزایش انرژی پاندوماتیو می‌شود. مقدار انرژی پاندوماتیو برابر است با مقدار انرژی که الکترون در زمان حرکت در میدان لیزری کسب می‌کند. در نتیجه با افزایش میدان ورودی، انرژی پاندوماتیو

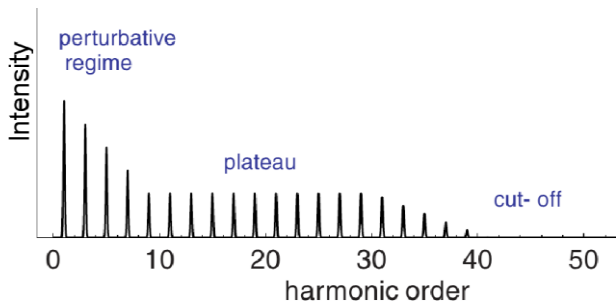
افزایش می‌یابد. گفته شد که انرژی فوتون ساطع شده از فرکانس قطع برابر با مجموع انرژی پاندوماتیو و پتانسیل یونیزاسیون است، پس با افزایش انرژی پاندوماتیو انرژی فوتون ساطع شده نیز افزایش می‌یابد.

برای تولید فرآیند غیرخطی HHG به شدت پالس بالاتر از 10^{13} W/cm^2 نیاز است که این شدت به تنهایی با استفاده از توان خروجی لیزر فمتوتانیه قابل دستیابی نیست. افزایش شدت لیزری همواره در آزمایشگاه‌ها امکان پذیر و مقرون به صرفه نیست. محققین برای افزایش شدت از نانوذرات در ابعاد و اشکال مختلف همانند پایبونی شکل، نانو سیم نانوذرات کرومی و ... استفاده می‌کنند [۹]. برای انجام این کار، از یک آرایه دوبعدی از نانوساختار فلزی طلا با عناصر کرومی بر روی بستر لیزر تیتانیوم سفایر استفاده می‌شود. در این فرآیند، از پالس لیزر فمتوتانیه با شدت نسبتاً کم استفاده می‌شود، که بسیار پایین‌تر از آستانه تولید HHG است.

در شکل ۲ مکانیزم فیزیکی فرآیند HHG در میدان پلاسمونیک نشان داده شده است. زمانی که نانوساختار در معرض پالس فمتوتانیه قرار می‌گیرند، الکترون‌های آزاد در یک طرف نانوذره کروی محصور می‌شوند و طرف مقابل با بارهای مثبت پر می‌شود. حرکت الکترون‌های آزاد سبب ایجاد پلاسمون جایگزیده می‌شود و پالس کم شدت فمتوتانیه با مد پلاسمون جفت می‌شوند و نوسان پیوسته میان بارهای آزاد نانوذرات فلزی انجام می‌دهند و این امر سبب تقویت میدان لیزری اولیه به اندازه حداقل دو مرتبه می‌شود و شدت مناسب برای تولید هماهنگ مرتبه بالا را پیدا می‌کنند. پالس لیزری تقویت شده با ماده هدف برهم‌کنش انجام می‌دهد و فرآیند تولید هماهنگ بالا رخ می‌دهد [۹].

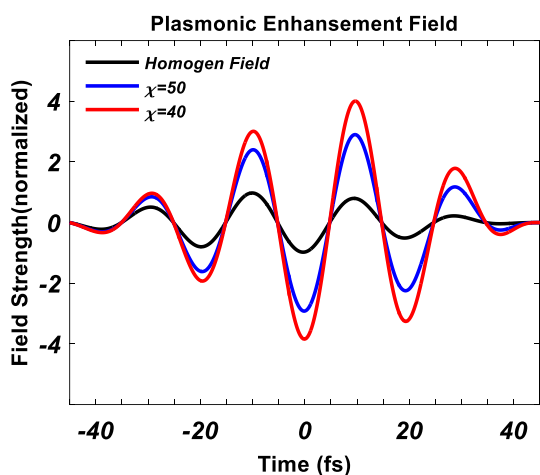


شکل ۲) شماتیک استفاده از نانوذرات کروی طلا جهت بهبود میدان ورودی برای فرآیند HHG



شکل ۳) شماتیک ساختار طیف هارمونیک‌های مرتبه بالا

آن می‌باشد که مقدار آن با توجه به آزمایشات تعیین شده است. در اینجا مقدار $\chi = \infty, 50, 40$ انتخاب شده است. ۱- زمانی که $\infty = \chi$ است، ترم میدان پلاسمونیک برابر با یک می‌شود ($\exp[-x/\chi] = 1$)، یعنی اثر میدان پلاسمونیک نداریم و میدان اندرکنشی میدان همگن لیزری است ۲- زمانی که $\chi = 50$ میدان غیرهمگن پلاسمونیک و ۳- زمانی که $\chi = 40$ میدان غیرهمگن بهینه شده پلاسمونیک است. از آنجایی که پارامتر χ در مخرج تابع نمایی است با کاهش این پارامتر مقدار وابستگی میدان پلاسمونیک افزایش می‌یابد. در شکل ۴ مقایسه میدان لیزری به ازای $\chi = \infty, 50, 40$ نشان داده شده است. دیده می‌شود که استفاده از نانوذرات شدت میدان اولیه را به طور قابل ملاحظه‌ای افزایش می‌دهد و با مقایسه دو حالت $\chi = 50, 40$ می‌توان درک کرد که انتخاب جنس و اندازه نانوذره در شدت ورودی تأثیری به سزایی دارد.



شکل ۴) مقایسه میدان لیزری با توجه به پارامتر $\chi = \infty, 50, 40$

در تقریب تک الکترون فعال، هماهنگ حاصل از یک اتم یا مولکول با تبدیل فوریه شتاب الکترون فعال [۱] متناسب است، که بصورت زیر می‌باشد:

$$I(t) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} a(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2 \quad (۴)$$

$a(t)$ با استفاده از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$a(t) = \langle \psi(x,t) | -dV(x)/dx + E(x,t) | \psi(x,t) \rangle \quad (۵)$$

که اینجا برای شبیه‌سازی طول موج، پهنا و شدت پالس به ترتیب برابر با $\lambda = 720 \text{ nm}$ ، $\tau = 13 \text{ fs}$ و $I = 5 \times 10^{13} \text{ W/Cm}^2$ می‌باشند که این پارامترها با توجه به شرایط تجربی در نظر گرفته شده است.

نتایج شبیه‌سازی

در ابتدا، معادله شرودینگر وابسته به زمان برای اتم هیدروژن و یون مولکولی H_2^+ به صورت عددی با استفاده از روش المان محدود و تقریب کرانک نیکلسون حل شده است. سپس طیف HHG ترسیم و تولید پالس آتوتوانیه محاسبه گردید. برای شبیه‌سازی طیف HHG در ابتدا پارامتر χ را بینهایت

در شکل ۳ طیف هماهنگ‌های بالا دارای ساختار نشان داده شده است. در چند هماهنگ اول طیف افت سریع پیدا می‌کند. پس آن شدت هماهنگ‌ها تقریباً یکسان است که به این ناحیه، ناحیه تخت گفته می‌شود. در نهایت هماهنگ‌ها با یک افت سریع پایان می‌پذیرد که به آن فرکانس قطع گفته می‌شود. فرکانس قطع تعیین کننده بالاترین فرکانسی است که با استفاده از آن می‌توان پالس آتوتوانیه با بهره‌وری بالا را تولید کرد.

در این مقاله، فرکانس قطع و ناحیه تخت هماهنگ مرتبه بالا برای تولید پالس آتوتوانیه به صورت تئوری بررسی می‌شود. برای انتخاب ماده مناسب برای برهم‌کنش با میدان لیزری، طیف یون مولکولی H_2^+ و اتم H شبیه‌سازی و مقایسه شده است.

از لیزرهای تیتانیوم سفایر با پالس گوسی با پهنا پالس ۱۰ fs و شدت $1.4 \times 10^{14} \text{ W/cm}^2$ به عنوان میدان قوی استفاده شده است برای بهینه‌سازی فرکانس قطع از میدان پلاسمونیک ناشی از نانوذرات کروی شکل استفاده شده است.

روش محاسباتی

در این مقاله، طیف هماهنگ بالا برای اتم هیدروژن با استفاده از حل عددی معادله شرودینگر یک بعدی محاسبه می‌شود [۱۰]. (در کل محاسبات از واحد اتمی استفاده می‌شود)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x,t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla^2 + V(x) - ex \cdot E(x,t) \right] \psi(x,t) \quad (۱)$$

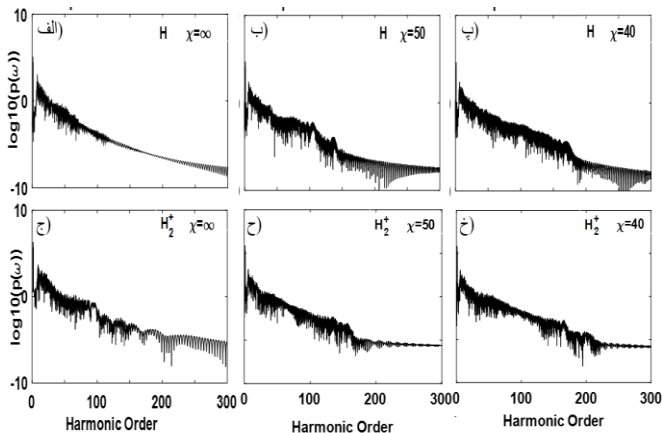
$\psi(x,t)$ تابع موج، \hbar ، m_e و e به ترتیب ثابت پلانک، بار الکترون و جرم هستند. در فیزیک میدان قوی و علم آتوتوانیه از واحد اتمی استفاده می‌شود و $\hbar = m_e = e = 1$. در میدان قوی پتانسیل اتم به صورت پتانسیل کولنی نرم یا هموار تعریف می‌شود معادله آن برای تک اتم برابر است با: ، ثابت هموارساز اتم است و از تکینگی در نقطه صفر جلوگیری می‌کند. مقدار ثابت هموارساز برای هر ماده‌ای متفاوت است. در این مقاله از اتم هیدروژن و یون مولکولی دی هیدروژن استفاده شده است و معادله پتانسیل کولنی برای یون مولکولی دو اتمی برابر است با: $V_{-}(H_2^+) (x) = -1/\sqrt{(x-R)^2+a^2} + 1/\sqrt{(x+R)^2+a^2}$ است که در آن R فاصله بین هسته‌ها، a ثابت هموارساز برای یون مولکولی دو اتمی است [۷]. عبارت پتانسیل ناشی از برهم‌کنش لیزر و اتم است. رابطه ۲ وابستگی فضایی میدان به صورت عبارت اختلالی و تقریب دو قطبی تعریف می‌کند [۱۱].

$$E(x,t) = E_0 f(t) \exp[-x/\chi] \sin(\omega t) \quad (۲)$$

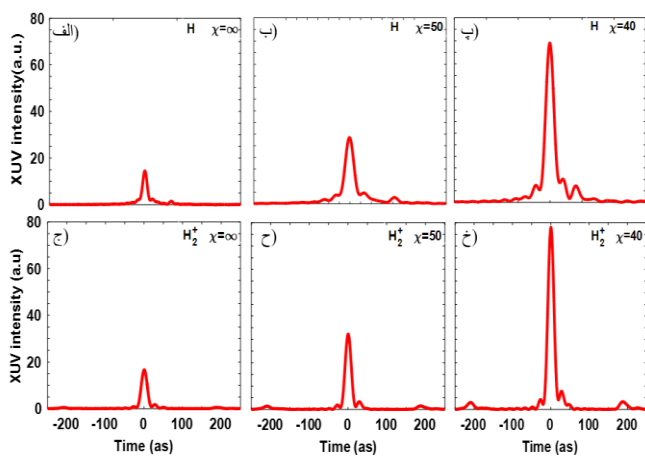
فرض بر این است میدان تک رنگ و در راستای پلاریزه شده است پیک دامنه، فرکانس زاویه‌ای و بسته موج است و از پالس لیزر به شکل پالس مربع سینوسی استفاده می‌شود.

$$f(t) = \sin^2\left(\frac{\omega t}{2n_p}\right) \quad (۳)$$

تعداد چرخه‌های اپتیکی و است. در رابطه ۲، ترم $\exp[-x/\chi]$ اثر میدان پلاسمونیک برای نانوذرات کروی را نشان می‌دهد. χ پارامتر وابستگی غیرهمگنی نانوذرات است که مقدار آن به جنس و اندازه نانوذرات کروی استفاده بستگی دارد [۱۱]. انتخاب χ معادل با انتخاب جنس و اندازه



شکل ۵) طیف HHG در میدان همگن لیزری و میدان پلاسمونیک



شکل ۶) پالس آتوتانیة در میدان همگن و میدان پلاسمونیک

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله فرکانس قطع طیف HHG برای تولید پالس آتوتانیة از اتم هیدروژن و یون مولکولی H_2^+ بررسی شد برای شبیه‌سازی از میدان همگن لیزری و میدان افزایشی پلاسمونیک استفاده کردیم.

نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که حضور نانوذرات باعث تقویت میدان ورودی و افزایش فرکانس قطع و گسترده‌تر شدن ناحیه تخت و کاهش افت و خیز شدت هماهنگ تخت می‌شود و از آنجایی که پالس آتوتانیة نتیجه برهم نهی هماهنگ‌های ناحیه تخت است، با بهبود ناحیه تخت پالس آتوتانیة نیز بهینه‌تر می‌شود.

از طرفی دیگر با مقایسه طیف دو ماده اندرکنشی هیدروژن و یون مولکولی دی هیدروژن، می‌توان تاثیر انتخاب ماده اندرکنشی را بررسی کرد. مقایسه طیف HHG دو ماده نشان می‌دهد که در هر سه حالت فرکانس قطع طیف HHG یون مولکولی دی هیدروژن بیشتر است. پس می‌توان نتیجه گرفت که استفاده از یون مولکولی هیدروژن در میدان پلاسمونیک برای فرآیند تولید هماهنگ بالا مناسب‌تر از اتم هیدروژن است.

در نظریه‌گیری یعنی طیف HHG را در غیاب نانوذرات فلزی طلا (میدان همگن لیزر) بررسی می‌کنیم. سپس در حضور نانوذرات فلزی که باعث ایجاد میدان پلاسمونیک می‌شود، در دو حالت $\chi=50,40$ بررسی می‌کنیم که در شکل ۵ نشان داده شده است.

ابتدا تأثیر میدان بر طیف هماهنگ بالا را بررسی می‌کنیم فرکانس قطع طیف HHG اتم هیدروژن در حالت $\chi=\infty$ ، در حدود ۸۰ است که شکل ۵-الف رسم شده است. با تقویت میدان به واسطه نانوذرات $\chi=50$ ، مرتبه فرکانس قطع برای اتم هیدروژن به حدود ۱۰۰ افزایش می‌یابد که در شکل ۵-ب رسم شده است. با مقایسه شکل ۵-الف و ب مشاهده می‌شود که میدان پلاسمونیک باعث افزایش فرکانس قطع و پهن‌تر شدن ناحیه تخت طیف هماهنگ‌ها شده است و افت و خیز شدت در ناحیه تخت در حضور میدان پلاسمونیک نسبت به میدان قبلی خیلی کمتر شده است. فرکانس قطع طیف HHG اتم هیدروژن در حالت $\chi=40$ ، نزدیک به ۱۵۰ است (شکل ۵-پ). با مقایسه شکل ۵-ب و پ می‌توان مشاهده کرد که با افزایش تأثیر میدان پلاسمونیک فرکانس قطع افزایش یافته و ناحیه تخت پهن‌تر و افت و خیز شدت در ناحیه تخت بسیار کاهش یافته است. طیف HHG برای یون مولکولی H_2^+ در شکل ۵-ج، ح، خ به ترتیب برای $\chi=50,40$ و برای حالت بدون حضور نانوذرات ترسیم شده است.

فرکانس قطع یون مولکولی در میدان همگن لیزری نزدیک به هماهنگ ۱۰۰، در حضور نانوذرات فلزی با مشخصه میدان پلاسمونیک $\chi=50$ نزدیک به ۱۴۰ با مشخصه $\chi=40$ ، نزدیک به ۱۸۰ است. تأثیر میدان برای یون مولکولی H_2^+ شبیه به اتم هیدروژن است و حضور نانوذره باعث افزایش فرکانس قطع و پهن‌تر شدن ناحیه تخت و بهبود شدت هماهنگ‌های ناحیه تخت می‌شود.

با مقایسه نتایج شبیه‌سازی برای یون مولکولی H_2^+ و اتم هیدروژن در سه حالت، فوق دیده می‌شود که هر سه حالت فرکانس قطع و پهنای ناحیه تخت یون مولکولی H_2^+ بیشتر از اتم هیدروژن و افت و خیز شدت ناحیه تخت کم‌تر است و از آنجایی که پالس آتوتانیة نتیجه برهم‌نهی هماهنگ‌های ناحیه تخت است انتظار می‌رود که پالس آتوتانیة برای یون مولکولی H_2^+ در میدان پلاسمونیک مناسب‌تر باشد. شکل ۶ پالس آتوتانیة برای دو اتم و یون مولکولی مذکور را برای نشان می‌دهد.

نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که شدت پالس آتوتانیة در میدان پلاسمونیک بیشتر از میدان لیزری است و پهنای پالس آن نیز کمتر است. با افزایش اثر پلاسمونیک، شدت و پهنای پالس آتوتانیة بهبود پیدا کرده است. با مقایسه پالس آتوتانیة، در میدان‌های مشابه دیده می‌شود که پتانسیل یونیزاسیون بالاتر موجب افزایش فرکانس قطع و پهنای ناحیه تخت آن می‌شود و امکان دستیابی به پالس آتوتانیة کوتاه‌تر میسر می‌سازد. این نتایج با بیان کلاسیکی کاملاً مطابقت دارد و استفاده از پتانسیل یونیزاسیون و شدت میدان ورودی بالاتر سبب بهینه‌سازی پالس آتوتانیة می‌شود.

منابع و مراجع

- R. Aghbolaghi, S. Majidi, N. Anvari and M. Sahrai, High harmonic generation and analysis the ionization probability for Hydrogen gas in plasmonic field enhancement, *Nanomegnyas* 4 (2015) 135-143.
- H. A. Navid, R. Aghbolaghi and Z. Yarali, Generation of carrier-envelope phase-controlled isolated attosecond pulses using chirped femtosecond excitation lasers, *Journal of Modern Optics* 66 (2019) 1744-1753.
<https://doi.org/10.1080/09500340.2019.1662955>
- H. A. Navid and M. Keshavarzi, Optimal control of high harmonics for the generation of double attosecond pulses by using a chirped laser pulse, *Journal of Modern Optic* 20 (2017) 1-6.
<https://doi.org/10.1080/09500340.2017.1343399>
- P. B. Corkum, "Plasma perspective on strong field multiphoton ionization," *Physics Review Letter* 71 (1993) 1993-1997.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.71.1994>
- M. Lewenstein, P. Balcou, M. Y. Ivanov, A. L'Huillier and P. B. Corkum, theory of high-harmonic generation by low-frequency laser fields, *Physical Review A* 49 (1994) 2117.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.49.2117>
- P. Corkum, Attosecond pulses at last, *nature* 403 (2000) 845.
<https://doi.org/10.1038/35002711>
- B. Zhang and M. Lein, High-order harmonic generation from diatomic molecules in an orthogonally polarized two-color laser field, *Physical Review A* 100 (2019) 043401.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.100.043401>
- S. Majidi, R. Aghbolaghi and H. A. Navid, Probability of ionization of the noble gas atoms and ions for high harmonic generation, *Modern Physics Letters B* 37 (2023) 2350039.
<https://doi.org/10.1142/S0217984923500392>
- S. Kim, J. Jin, Y.J. Kim, I.Y. Park, Y. Kim and S.W. Kim, High-harmonic generation by resonant plasmon field enhancement, *Nature* 453(2008) 757-760.
<https://doi.org/10.1038/nature07012>
- M. Delfour, M. Fortin and G. Payr, Finite-difference solutions of a non-linear Schrödinger equation, *Journal of Computational Physics* 44 (1981) 277.
[https://doi.org/10.1016/00219991\(81\)90052-8](https://doi.org/10.1016/00219991(81)90052-8)
- T. Shaaran, M. F. Ciappina, R. Guichard, J. A. Pérez-Hernández, L. Roso, M. Arnold, T. Siegel, A. Zaïr, and M. Lewenstein, High order harmonic generation by enhanced plasmonic near-fields in metal nanoparticles, *Physics Review A* 87 (2013) 041402.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.87.041402>